

# Analyse von $\Delta S = 1$ -Übergängen im Epsilonregime

Diplomarbeit  
von  
Bastian Knippschild

Institut für Kernphysik  
Johannes-Gutenberg-Universität Mainz  
16. April 2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>iii</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Gitter QCD . . . . .	1
1.1.1 Euklidische Gitter-Quantisierung der $\Phi^4$ -Theorie . . . . .	2
1.1.2 Eichfelder auf dem Gitter . . . . .	8
1.1.3 Formulierung der Gitter-QCD . . . . .	13
1.2 Chirale Störungstheorie . . . . .	16
1.2.1 Spontane Symmetriebrechung und Goldstone-Bosonen . . . . .	18
1.2.2 Spontane Symmetriebrechung in der QCD . . . . .	22
1.2.3 Die Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie . . . . .	24
1.3 Regime der chiralen Störungstheorie . . . . .	27
1.4 Verknüpfung von Gitter-QCD und chiraler Störungstheorie . . . . .	30

<b>2</b>	<b>Problemstellung</b>	<b>32</b>
2.1	Der Hamiltonoperator des $\Delta S = 1$ -Übergangs . . . . .	32
2.2	Korrelationsfunktionen . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Führende Ordnung</b>	<b>38</b>
3.1	Vorarbeit . . . . .	38
3.2	$O_{rsuv}$ vor der Projektion . . . . .	43
3.3	Der Operator $O_{27}$ in führender Ordnung . . . . .	45
3.4	Der Operator $O_8$ in führender Ordnung . . . . .	46
3.5	Der Operator $O'_8$ in führender Ordnung . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Nachführende Ordnung</b>	<b>48</b>
4.1	$O_{rsuv}$ vor der Projektion . . . . .	48
4.2	$O_{27}$ in nachführender Ordnung . . . . .	52
4.3	$O_8$ in nachführender Ordnung . . . . .	54
4.4	$O'_8$ in nachführender Ordnung . . . . .	55
4.5	Direkte Bestimmung von $g'_8$ . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>Projektionsoperatoren</b>	<b>60</b>
<b>B</b>	<b>Gruppenintegrale</b>	<b>63</b>

<b>C</b>	<b>Räumliche Mittelung der Propagatoren</b>	<b>69</b>
<b>D</b>	<b>Tensorstruktur mit physikalischen Indizes</b>	<b>72</b>
<b>E</b>	<b>Mathematica Notebook eines Graphen des Operators <math>O'_8</math></b>	<b>74</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>86</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>89</b>

# Einleitung

In dieser Arbeit wird eine Methode vorgestellt, die  $\Delta I = 1/2$ -Regel mit Hilfe einer Kombination aus chiraler Störungstheorie und Gitter-QCD zu untersuchen.

Die Übergangsamplituden des nicht-leptonischen schwachen Zerfalls eines neutralen Kaons in zwei Pionen mit Isospin  $I$  ist

$$\langle (\pi\pi)_I | H_W | K^0 \rangle = iA_I e^{i\delta_I}, \quad I = 0, 2, \quad (1)$$

wobei  $H_W$  für den  $\Delta S = 1$  Hamiltonoperator und  $\delta_I$  für die Phasenverschiebung der Streuung steht. Aus Experimenten weiß man, dass das Verhältnis der Amplituden der Endzustände mit Isospin null und eins gegeben ist als

$$\frac{|A_0|}{|A_2|} = 22.1. \quad (2)$$

Dieses Verhältnis ist bekannt als die  $\Delta I = 1/2$ -Regel.

Verschiedene Effekte der starken Wechselwirkung können bei unterschiedlichen Energien für dieses Ungleichgewicht verantwortlich sein. Bei einer Energie von ungefähr 100MeV könnten die Pion-Endzustände miteinander wechselwirken. Es könnten Effekte, die bei einer Energie  $E_{QCD} \approx 250\text{MeV}$  (nahe der intrinsischen QCD-Skala) auftreten, eine Rolle spielen. Außerdem könnte das Charmquark bei einer Energie von ungefähr 1GeV einen Beitrag liefern. Ob alle drei Effekte gleichermaßen oder einer im Besonderen beiträgt, ist derzeit noch ungeklärt. Auf jeden Fall müssen all diese Effekte nicht-perturbativ behandelt werden, da sie auf langreichweitige Effekte der starken Wechselwirkung zurückzuführen sind.

Um den Beitrag des Charmquarks bei diesem Prozess genauer verstehen zu können, muss auf nicht-perturbative Methoden zurückgegriffen werden, was die Gitter-QCD ins Spiel bringt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, mit einer Kombination aus Gittersimulationen und chiraler Störungstheorie das Problem anzugehen. Bei einer Energie von ungefähr 1 GeV wäre es im Prinzip möglich, die Übergangsamplituden direkt mit Hilfe von Simulationen der Gitter-QCD zu berechnen. Dies ist allerdings sehr aufwendig und teuer. Eine einfachere und billigere Möglichkeit ist, die Übergangsamplituden in chiraler Störungstheorie zu behandeln. Dabei treten Niederenergiekonstanten auf, die mit Hilfe von Simulationen auf einem Gitter berechnet werden können.

In [8] sind die Grundgedanken niedergeschrieben, auf welche Art und Weise die Übergangsamplituden in chiraler Störungstheorie und Gitter-QCD zu berechnen sind. Diese Berechnung läuft darauf hinaus, Dreipunktfunktionen zwischen zwei linkshändigen Strömen oder pseudoskalaren Dichten und dem zugrundeliegenden Hamiltonoperator zu bestimmen. Dazu kann zunächst das Problem mit einem leichten Charmquark und einer exakten  $SU(4)$ -Symmetrie angegangen werden. Danach kann man dazu übergehen, die Charmquark-Masse anzuheben und den Hamiltonoperator auf eine irreduzible Darstellung der  $SU(3)_L$  zu projizieren. Dies ermöglicht es, das Charmquark entweder auszuintegrieren oder aber in der Simulation explizit mitzuberechnen. Auf der Seite der chiralen Störungstheorie wird der Hamiltonoperator auf dieselbe Weise projiziert. Hier gibt es auch die Möglichkeit, das Charmquark auszuintegrieren [16] oder man geht direkt in den  $SU(3)$ -Fall der chiralen Störungstheorie über [17]. Die Dreipunktfunktionen mit dem projizierten Hamiltonoperator und zwei pseudoskalaren Dichten werden in dieser Arbeit sowohl in führender als auch in nachführender Ordnung berechnet.

In Kapitel eins wird umfassend in die Gitter-QCD und die chirale Störungstheorie eingeführt. Außerdem wird gezeigt, wie die Verknüpfung zwischen Gitter-QCD und chiraler Störungstheorie im Prinzip möglich ist. Kapitel zwei befasst sich mit der Herleitung des Hamiltonoperators mit aktivem Charmquark, der für die  $\Delta S = 1$ -Übergänge verantwortlich ist. Dies wird sowohl für die Gitter-QCD als auch die chirale Störungstheorie gemacht. In Kapitel drei werden alle notwendigen Entwicklungen in der chiralen Störungstheorie entsprechend dem Zählschema des Epsilonregimes ausgeführt und die Korrelationsfunktionen in führender Ordnung berechnet. Die nachführende Ordnung ist Thema des vierten Kapitels und in Kapitel fünf werden alle Ergebnisse zusammengefasst. Die Anhänge enthalten weitergehende technische Details.

# Kapitel 1

## Grundlagen

### 1.1 Gitter QCD

Die Quantenchromodynamik ist, wie die Quantenelektrodynamik, eine Eichtheorie, allerdings mit dem Unterschied, dass die zugrunde liegende Eichgruppe nicht abelsch und die Theorie damit bedeutend schwerer zu lösen ist. Bis heute hat man noch keinen analytischen Zugang gefunden, um die QCD im Nieder-Energiesektor zu lösen. Deshalb muss man sich häufig effektiven Theorien zuwenden, wie zum Beispiel der chiralen Störungstheorie. Dies hat allerdings den Nachteil, dass nur Bereiche bestimmter Energien und niemals die volle Theorie gelöst werden können.

Im Gegensatz dazu verfolgt die Gitter-QCD einen anderen Ansatz. Die QCD wird auf einem Raum-Zeit-Gitter definiert und dann mit numerischen Methoden auf einem Computer simuliert. Der Vorteil liegt klar auf der Hand: Die gesamte Theorie ist bis auf statistische Fehler durch die Simulationen lösbar. Allerdings kommt man auch hier nicht ganz ohne effektive Theorien aus, denn die Simulationen unterliegen gewissen Beschränkungen, auf die in Kapitel 1.1.3 genauer eingegangen wird.

Zwar wird die Gitter-QCD in dieser Diplomarbeit nicht verwendet, allerdings wird es dennoch eine Einführung geben, da die Verknüpfung zwischen Gitter-QCD und chiraler Störungstheorie für das zugrunde liegende Problem von essentieller Bedeutung ist. Um die Prinzipien der Quantisierung auf dem Gitter und der spontanen Symmetriebrechung zu zeigen, wird auf das Beispiel einer skalare Theorie mit  $\Phi^4$ -Wechselwirkung

zurückgegriffen.

### 1.1.1 Euklidische Gitter-Quantisierung der $\Phi^4$ -Theorie

Um eine Theorie auf dem Gitter zu quantisieren, benötigt man generell vier Schritte.

#### 1. Definition der klassischen euklidischen Wirkung

Die Wirkung wird normalerweise auf einem euklidischen Gitter definiert, da Simulationen auf einer euklidischen Raum-Zeit deutlich einfacher zu realisieren sind. Im Fall einer skalaren Theorie mit  $\Phi^4$ -Wechselwirkung ergibt sich die folgende Wirkung

$$S_E[\Phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi(x) \partial_\mu \Phi(x) + \frac{1}{2} m^2 \Phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi(x)^4 \right\}. \quad (1.1)$$

#### 2. Diskretisierung der Lagrangedichte

Damit die Lagrangedichte diskretisiert werden kann, muss zuerst ein Gitter  $\Lambda_E$  definiert werden, auf dem dies geschehen soll

$$\Lambda_E = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^0/a = 1, \dots, N_t; x^j/a = 1, \dots, N_s, j = 1, 2, 3\}. \quad (1.2)$$

Hier ist  $a$  die Gitterkonstante und  $N_t \times N_s^3$  die Anzahl der Gitterpunkte. Das physikalische Volumen ist dadurch gegeben als  $V = T \times L^3 = N_t \cdot a \times (N_s \cdot a)^3$ . Feldtheoretische Größen können auf dem Gitter verschiedenen Gittervariablen zugeordnet werden, zum Beispiel das skalare Feld den Gitterpunkten  $x_n$ .

Die Lagrangedichte und damit auch die Wirkung werden wie folgt auf dem Gitter definiert

$$S_E[\Phi] = a^4 \sum_{x \in \Lambda_E} \left\{ \frac{1}{2} d_\mu \Phi(x) d_\mu \Phi(x) + \frac{1}{2} m^2 \Phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi(x)^4 \right\}. \quad (1.3)$$

Die Ableitungen gibt es in zwei diskretisierten Formen, die eine wirkt rückwärts

und die andere vorwärts

$$d_\mu \Phi(x) = \frac{1}{a} (\Phi(x + a\hat{\mu}) - \Phi(x)), \quad (1.4)$$

$$d_\mu^* \Phi(x) = \frac{1}{a} (\Phi(x) - \Phi(x - a\hat{\mu})), \quad (1.5)$$

wobei  $\hat{\mu}$  der Einheitsvektor in  $\mu$ -Richtung ist. Wie in der Festkörperphysik kann auch in der Gitterfeldtheorie ein inverses Gitter  $\Lambda_E^*$  über Fouriertransformation definiert werden

$$\Lambda_E^* = \left\{ p \in \mathbb{R}^4 \left| p^0 = \frac{2\pi}{T} n^0, p^j = \frac{2\pi}{L} n^j, j = 1, 2, 3, \right. \right\}. \quad (1.6)$$

Hier gilt  $n_0 = -\frac{N_t}{2}, \dots, (\frac{N_t}{2} - 1)$  und  $n_j = -\frac{N_s}{2}, \dots, (\frac{N_s}{2} - 1)$ . Das fouriertransformierte Feld ist definiert als

$$\tilde{\Phi}(p) = \sum_{n=1}^L e^{-ipna} \Phi(x_n). \quad (1.7)$$

Durch die Transformation erhält man auf natürlichem Wege zwei wichtige Eigenschaften. Zum einen sind  $p^0$  und  $p^j$  in Einheiten von  $2\pi/T$  und  $2\pi/L$  quantisiert, zum anderen erhält man einen Impuls-Cutoff  $\Lambda = \pi/a$ , denn der Impuls liegt immer in den Brillouin-Zonen mit den Werten

$$-\frac{\pi}{a} \leq p \leq \frac{\pi}{a}. \quad (1.8)$$

Das Gitter kann also als ein Regulator angesehen werden. Durch die Formulierung auf dem Gitter ergibt sich noch ein weiterer Vorteil: Man kann zusätzliche Terme, zum Beispiel zum Potential oder den Ableitungen addieren, solange diese Terme im Kontinuumsimes ( $a \rightarrow 0$ ) verschwinden.

### 3. Quantisierung mit dem Pfadintegral

Das euklidische Pfadintegral auf dem Gitter ist definiert als

$$Z_E := \int \mathfrak{D}[\Phi] e^{-S_E[\Phi]}. \quad (1.9)$$

Das Integrationsmaß  $\mathfrak{D}[\Phi]$  hat auf dem Gitter die Bedeutung einer einfachen mul-

tidimensionalen Integration

$$\mathfrak{D}[\Phi] = \prod_{x \in \Lambda_E} d\Phi(x). \quad (1.10)$$

Wie im Kontinuum können auch auf dem Gitter ein erzeugendes Funktional und Korrelationsfunktionen definiert werden. Um dies zu tun, benötigt man zuerst das Skalarprodukt der Felder

$$(\Phi_1, \Phi_2) = a^4 \sum_{x \in \Lambda_E} \Phi_1(x) \Phi_2(x). \quad (1.11)$$

Die Wirkung des freien Feldes ist dann

$$S_E[\Phi] = \frac{1}{2} (\Phi, K\Phi), \quad (1.12)$$

wobei  $K$  ein linearer Operator sein soll

$$K = -d_\mu^* d_\mu + m^2. \quad (1.13)$$

Die Korrelationsfunktionen können wie im Kontinuum einfach hingeschrieben werden

$$\langle \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z_E} \int \prod_{x \in \Lambda_E} d\Phi(x) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) e^{-S_E[\Phi]}. \quad (1.14)$$

In ihnen steckt der gesamte physikalische Inhalt in der euklidischen Raumzeit und im Kontinuum-Grenzfall werden sie zu Schwingerfunktionen. Das Kriterium von OSTERWALDER UND SCHRADER besagt nun, dass diese Informationen in der Minkowski-Raumzeit aus den Schwingerfunktionen rekonstruiert werden können. Mit Hilfe von externen Feldern  $J(x)$ , die auf dem Gitter definiert werden, kann das erzeugenden Funktional  $W[J]$  definiert werden als

$$e^{W[J]} := \langle e^{(J, \Phi)} \rangle = \frac{1}{Z_E} \int \prod_{x \in \Lambda_E} d\Phi(x) e^{-S_E[\Phi]} e^{(J, \Phi)}. \quad (1.15)$$

Wie üblich können die Korrelationsfunktionen durch Ableiten des erzeugenden Funktionals nach den äußeren Feldern berechnet werden.

Man erhält

$$\frac{\partial}{\partial J(x)} e^{W[J]} = a^4 \langle \Phi(x) e^{(J, \Phi)} \rangle \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial J(x_1) \partial J(x_2)} e^{W[J]}|_{J=0} = (a^4)^2 \langle \Phi(x_1) \Phi(x_2) \rangle \quad (1.17)$$

⋮

Interessant ist nun noch die Beziehung zwischen dem erzeugenden Funktional  $W[J]$  und dem Operator  $K$  im freien Fall

$$e^{W[J]} = \frac{1}{Z_E} \int \prod_{x \in \Lambda_E} d\Phi(x) e^{-\frac{1}{2}(\Phi, K\Phi) + (J, \Phi)} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \text{exponent: } & -\frac{1}{2}(\Phi - K^{-1}J, K(\Phi - K^{-1}J)) + (J, K^{-1}J) \\ & = -\frac{1}{2}\{(\Phi, K\Phi) - (K^{-1}J, K\Phi) - (\Phi, J) + (K^{-1}J, J)\} + \frac{1}{2}(J, K^{-1}J) \\ \Rightarrow e^{W[J]} & = e^{\frac{1}{2}(J, K^{-1}J)} \frac{1}{Z_E} \int \prod_{x \in \Lambda_E} d\Phi(x) \exp\left\{-\frac{1}{2} \underbrace{(\Phi - K^{-1}J, K(\Phi - K^{-1}J))}_{\Phi'}\right\} \\ & = e^{\frac{1}{2}(J, K^{-1}J)}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Der inverse Operator  $K^{-1}$  wird also benötigt. Um ihn zu berechnen, wird er durch eine Fouriertransformation diagonalisiert. Dazu müssen zuerst die externen Felder transformiert werden

$$J(x) = \frac{1}{L^3 \cdot T} \sum_{p \in \Lambda_E^*} e^{ipx} \tilde{J}(p) \quad , \quad \tilde{J}(p) = a^4 \sum_y e^{-ipy} J(y). \quad (1.20)$$

Mit Hilfe des auf dem Gitter definierten Laplace-Operators

$$d_\mu^* d_\mu f(x) = \frac{1}{a^2} \{f(x + a\hat{\mu}) + f(x - a\hat{\mu}) - 2f(x)\} \quad (1.21)$$

kann die Transformation des Operators  $K$  berechnet werden, der auf ein externes Feld  $J(x)$  wirkt

$$KJ(x) = \frac{1}{L^3 \cdot T} \sum_{p \in \Lambda_E^*} (K e^{ipx}) \tilde{J}(p). \quad (1.22)$$

Um zu wissen, wie  $K$  auf ein Feld wirkt, muss nur noch Folgendes berechnet werden:

$$\begin{aligned}
Ke^{ipx} &= (-d_\mu^* d_\mu + m^2)e^{ipx} \\
&= -\frac{1}{a^2}(e^{ip(x+a\hat{\mu})} + e^{ip(x-a\hat{\mu})} - 2e^{ipx}) + m^2e^{ipx} & p \cdot \hat{\mu} = p_\mu \\
&= \left\{ -\frac{1}{a^2}(e^{ip_\mu a} + e^{-ip_\mu a} - 2) + m^2 \right\} e^{ipx} \\
&= \left\{ -\frac{4}{a^2} \sin\left(\frac{p_\mu a}{2}\right) + m^2 \right\} e^{ipx} \\
&= (\hat{p}^2 + m^2)e^{ipx}, \quad \hat{p}_\mu := \frac{2}{a} \sin\left(\frac{p_\mu a}{2}\right) & \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.23)
\end{aligned}$$

$K$  wirkt also nur durch eine Multiplikation mit  $(\hat{p}_\mu^2 + m^2)$  auf ein externes Feld und man kann den inversen Operator leicht berechnen

$$\begin{aligned}
(K^{-1}J)(x) &= \frac{1}{L^3 \cdot T} \sum_{p \in \Lambda_E^*} (K^{-1}e^{ipx}) \tilde{J}(p) \\
&= \frac{1}{L^3 \cdot T} \sum_{p \in \Lambda_E^*} \{(\hat{p}^2 + m^2)^{-1} e^{ipx}\} \underbrace{\tilde{J}(p)}_{=a^4 \sum_y e^{-ipy} J(y)} \\
&= a^4 \sum_y \frac{1}{L^3 \cdot T} \sum_{p \in \Lambda_E^*} \frac{e^{ip(x-y)}}{\hat{p}^2 + m^2} J(y) \\
&= a^4 \sum_y G(x-y) J(y). \quad (1.24)
\end{aligned}$$

$G(x-y)$  ist die Greensfunktion zu dem Operator  $K$ . Mit Hilfe der Greensfunktion kann das erzeugende Funktional als

$$e^{W[J]} = \exp \left\{ \frac{1}{2} a^4 \sum_{x,y} J(x) G(x-y) J(y) \right\} \quad (1.25)$$

geschrieben werden, woraus der Propagator leicht berechnet werden kann

$$\langle \Phi(x)\Phi(y) \rangle = \frac{1}{(a^4)^2} \frac{\partial^2}{\partial J(x)\partial J(y)} e^{W[J]}|_{J=0} = G(x-y). \quad (1.26)$$

An dieser Stelle sind noch zwei Aspekte wichtig:

- Entwickelt man  $\hat{p}_\mu$  in  $a$ , erhält man den euklidischen Impuls  $\hat{p}_\mu = p_\mu + O(a^2)$  und die Greensfunktion wird im Kontinuumslimit ( $a \rightarrow 0$ ) zum Feynman-Propagator in euklidischer Raum-Zeit.
- Die Teilchenmassen sind durch Pole im Propagator bestimmt. Der Propagator ist in diesem Fall gegeben als  $(\hat{p}_\mu^2 + m^2)^{-1}$ , wobei  $\hat{p}_\mu = \frac{2}{a} \sin(\frac{p_\mu a}{2})$  eine periodische Funktion mit der Periode  $\frac{2\pi}{a}$  ist. Das führt zu zwei Dingen:
  - die Pole sind eindeutig festgelegt modulo  $\frac{2\pi}{a}$
  - innerhalb einer Brillouinzone ist das Massenspektrum eindeutig

#### 4. Teilchenspektrum und Korrelationsfunktionen

Um das Teilchenspektrum zu bestimmen, braucht man eine Beziehung zwischen der Korrelationsfunktion und den Eigenwerten  $E_\alpha$  des Hamiltonoperators des gegebenen Systems. Um das zu bewerkstelligen, wird zunächst eine vollständige Basis  $|\alpha\rangle$  des Hilbertraumes  $\mathcal{H}$ , auf dem der Hamiltonoperator lebt, benötigt. Es soll nun ein Operator  $\mathbb{T}$  auf dem Hilbertraum existieren, der die Eigenschaften

$$\mathbb{T}|\alpha\rangle = \lambda_\alpha|\alpha\rangle \quad \lambda_\alpha: \text{Eigenwerte}, \quad (1.27)$$

$$\text{wobei } \mathbb{T} = e^{-aH} \quad , \quad \lambda_\alpha = e^{-aE_\alpha}.$$

besitzt.  $\mathbb{T}$  nennt man auch Transfermatrix, da es ein Zeitentwicklungsoperator ist, der ein Fortschreiten um einen Gitterpunkt auf dem euklidischen Gitter beschreibt. Sowohl die Felder als auch das Funktionalintegral können durch den Operator  $\mathbb{T}$  ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} Z_E &= \int \mathcal{D}[\Phi] e^{-S_E[\Phi]} = \text{Tr} \mathbb{T}^{\frac{T}{a}} \\ &= \sum_\alpha \lambda_\alpha^{\frac{T}{a}} = \sum_\alpha e^{-TE_\alpha}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\Phi(\vec{x}, T) = \mathbb{T}^{\frac{T}{a}} \Phi(\vec{x}, 0) = e^{-TH} \Phi(\vec{x}, 0), \quad (1.29)$$

Mit der Vollständigkeit des Hilbertraumes und den beiden obigen Eigenschaften können Zweipunktfunktionen für große Zeitintervalle  $T \rightarrow \infty$  berechnet werden

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(x)\Phi(y) \rangle &= \\
&= \frac{1}{Z_E} \int \mathfrak{D}[\Phi] \Phi(x)\Phi(y) e^{-S_E[\Phi]} \\
&= \frac{1}{\text{Tr} \mathbb{T}^N} \text{Tr} \{ \mathbb{T}^{N_0} \Phi(\vec{x}, 0) \mathbb{T}^{N_1} \Phi(\vec{y}, 0) \mathbb{T}^{N_2} \} \\
&\quad \text{Abkürzungen: } N = \frac{T}{a}; N_0 = -\frac{x_0}{a}; N_1 = \frac{x_0 - y_0}{a}; N_2 = \frac{T + y_0}{a} \\
&= \frac{1}{\text{Tr} \mathbb{T}^N} \text{Tr} \{ \mathbb{T}^{N_0+N_2} \underbrace{1}_{\sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|} \Phi(\vec{x}, 0) \mathbb{T}^{N_1} \underbrace{1}_{\sum_{\beta} |\beta\rangle\langle\beta|} \Phi(\vec{y}, 0) \} \\
&= \frac{1}{\sum_{\alpha} e^{-TE_{\alpha}}} \sum_{\alpha, \beta} \{ \langle \beta | \Phi(\vec{y}, 0) e^{-H(T-(x_0-y_0))} | \alpha \rangle \langle \alpha | \Phi(\vec{x}, 0) e^{-H(x_0-y_0)} | \beta \rangle \} \\
&= \frac{1}{\sum_{\alpha} e^{-TE_{\alpha}}} \sum_{\alpha, \beta} e^{-E_{\alpha}(T-t)} \{ \langle \beta | \Phi(\vec{y}, 0) | \alpha \rangle e^{-E_{\beta}t} \langle \alpha | \Phi(\vec{x}, 0) | \beta \rangle \}, \quad t = |x_0 - y_0| \\
&\quad \text{Grenzfall: } T \rightarrow \infty; t \ll T : \sum_{\alpha} e^{-TE_{\alpha}} = e^{-TE_0} (1 + O(e^{-TE_1})), \text{ wobei } E_1 > E_0 \\
&= \sum_{\beta} \langle \beta | \Phi(0, \vec{y}) | 0 \rangle e^{-(E_{\beta}-E_0)t} \langle 0 | \Phi(0, \vec{x}) | \beta \rangle. \tag{1.30}
\end{aligned}$$

$E_0$  ist die Vakuumenergie und  $E_{\beta} - E_0$  die Masse. Das Massenspektrum ist durch den exponentiellen Abfall der Zweipunktfunktion gegeben und die Matrixelemente  $\langle 0 | \Phi(0, \vec{x}) | \beta \rangle$  geben Auskunft über den Überlapp zwischen dem Zustand  $|\beta\rangle$  und dem Vakuum. In der QCD kann damit zum Beispiel eine Teilchenvernichtung beschrieben werden. Diese Gleichung ist die Basis für numerische Simulationen.

### 1.1.2 Eichfelder auf dem Gitter

Wie im vorangegangenen Kapitel gezeigt worden ist, leben skalare Felder auf den Gitterpunkten. Man kann sich die Frage stellen, ob auch andere Gittervariablen, wie zum Beispiel die Verbindungslinien zwischen den Gitterpunkten, feldtheoretischen Objekten zugeordnet werden können. Die Eichfelder sind genau solche Objekte. Um sie auf einem Gitter zu quantisieren, folgt man einfach den ersten drei Schritten des vorangegangenen Kapitels.

1. Die euklidische Yang-Mills-Wirkung ist gegeben als

$$S_E[A] = -\frac{1}{2g_0^2} \int d^4 x \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)), \quad (1.31)$$

wobei  $F_{\mu\nu}$  der Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (1.32)$$

und  $A_\mu$  das SU(N)-Eichfeld ist.  $A_\mu$  selbst ist ein Element der Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(N)$  und kann geschrieben werden als

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \quad A_\mu^a: \text{reelles Vektorfeld}; T^a: \text{Generator der Eichgruppe.} \quad (1.33)$$

Der Index  $a$  läuft von 1 bis  $N^2 - 1$ , wobei  $N$  die Zahl der Farben ist. Außerdem benötigt man noch das Transformationsverhalten der Eichfelder

$$A_\mu(x) \longrightarrow g(x)A_\mu(x)g^{-1}(x) + g(x)\partial_\mu g^{-1}(x) \quad (1.34)$$

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g(x)F_{\mu\nu}g^{-1}(x). \quad (1.35)$$

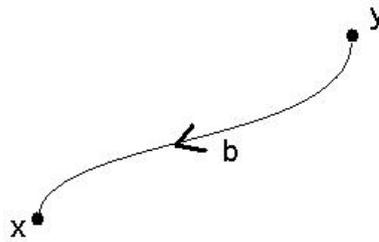
2. Mit dieser Vorarbeit kann das Eichfeld diskretisiert werden. Der einfachste Ansatz  $A_\mu(x)$ ,  $x \in \Lambda_E$  ist leider inkonsistent mit der Gruppenmultiplikation für nicht-abelsche Eichfelder. Das heißt, man benötigt eine andere Methode zu Diskretisierung.

Die Grundidee ist die Eichfelder mit einem Paralleltransporter zu verknüpfen. Im Kontinuum ist dieser durch eine Differentialgleichung festgelegt

$$\left( \frac{d}{dt} + z^\mu A_\mu(z) \right) v(t) = 0. \quad (1.36)$$

Auf der Abbildung Fig. 1.1 ist eine Kurve  $b$  zwischen zwei Punkten dargestellt. Diese Kurve wird durch  $z(t)$  parametrisiert, wobei  $0 \leq t \leq 1$  und  $z(0) = y$ ,  $z(1) = x$  gelten sollen. Die Gleichung 1.36 besitzt die Lösung

$$v(t) = P.O. \exp \left( - \int_y^x dz^\mu A_\mu(z) \right) v(0). \quad (1.37)$$

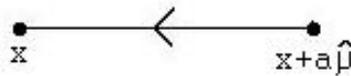


**Abbildung 1.1:** Paralleltransporter im Kontinuum

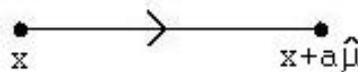
Die Richtung, in der die Kurve  $b$  durchlaufen wird, kann nicht vernachlässigt werden, da die Eichgruppe der QCD nicht abelsch ist. Dies wird durch P.O. angedeutet, was für Path Ordering (Pfadordnung) steht. Der Paralleltransporter von  $y$  nach  $x$  entlang  $b$  ist

$$U(x, y) = P.O. \exp\left(-\int_y^x dz^\mu A_\mu(z)\right). \quad (1.38)$$

Der Transporter  $U_\mu(x)$ , der auch Link-Variable genannt wird, ist ein Element von  $SU(N)$  und verbindet benachbarte Punkte auf dem Gitter. Die Abbildungen 1.2 und 1.3 zeigen die Transporter auf dem Gitter.



**Abbildung 1.2:**  $U_\mu(x, x + a\hat{\mu}) \equiv U_\mu(x)$



**Abbildung 1.3:**  $U_\mu(x + a\hat{\mu}, x) = U_\mu(x, x + a\hat{\mu})^{-1} = U_\mu(x)^{-1}$

Da  $A_\mu$  ein Element der Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(N)$  und die Linkvariable  $U_\mu(x)$  ein Element der Gruppe  $SU(N)$  ist, liegt folgende Verknüpfung

$$U_\mu(x) = e^{-aA_\mu(x)} \quad (1.39)$$

nahe.

Diese Definition ist nicht eindeutig, allerdings kann man immer eine Linkvariable zu einem Feld  $A_\mu^c(x)$  finden, welche das Feld für kleine  $a$  approximiert

$$U_\mu(x) := e^{aA_\mu^c(x)} = 1 + aA_\mu^c(x) + O(a^2) \quad (1.40)$$

$$\Rightarrow A_\mu^c(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (U_\mu(x) - 1). \quad (1.41)$$

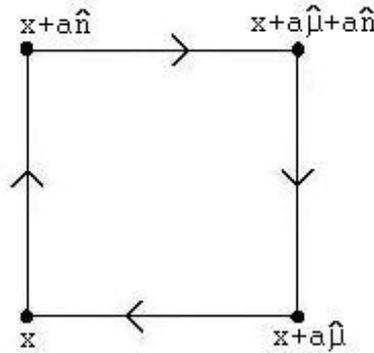
Es fehlen noch die Transformationseigenschaften der Linkvariablen unter Eichtransformationen

$$U_\mu(x) \longrightarrow g(x)U_\mu(x)g^{-1}(x + a\hat{\mu}), \quad g(x), g(x + a\hat{\mu}) \in SU(N). \quad (1.42)$$

Mit dieser Transformation ist eine geschlossene Kurve  $C$  auf dem Gitter eichinvariant. Diese Kurve wird Wilson-Schleife  $W(C)$  genannt

$$W(C) = \text{Tr}\{U^C(x, x)\}. \quad (1.43)$$

Eine Möglichkeit die Eichfelder auf dem Gitter zu diskretisieren, ist die Wilson-Plaquette-Wirkung. Das heißt, es werden mehrere Linkvariablen zu einem



**Abbildung 1.4:** Plaquette:  $P_{\mu\nu}(x)$

Plaquette  $P_{\mu\nu}(x)$ , wie in Abbildung 1.4, zusammengeslossen.

Macht man den Grenzübergang ins Kontinuum, so wird aus der Plaquette-Wirkung

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\{U_\mu(x) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu^{-1}(x + a\hat{\mu}) U_\nu^{-1}(x)\} = \text{Tr}\{P_{\mu\nu}(x)\} \\ & \xrightarrow{a \rightarrow 0} N + \frac{a^4}{2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu}^c F_{\mu\nu}^c\} + O(a^5). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Damit ist die Wilson-Wirkung gegeben als

$$S_E[U] = \beta \sum_{x \in \Lambda_E} \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Tr} P_{\mu\nu}(x)\right) \quad (1.45)$$

$$= \frac{\beta}{2} \sum_{x \in \Lambda_E} \sum_{\mu, \nu} \left\{1 - 1 - \frac{a^4}{2N} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^c(x) F_{\mu\nu}^c(x))\right\} + O(a^5)$$

$$= -\frac{\beta}{4N} a^4 \underbrace{\sum_{x \in \Lambda_E}}_{\rightarrow \int d^4 x} \sum_{\mu, \nu} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^c(x) F_{\mu\nu}^c(x)) + O(a^5)$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow 0} -\frac{1}{2g_0^2} \int d^4 x \text{Tr}(F_{\mu\nu}^c(x) F_{\mu\nu}^c(x)) \quad \text{wenn } \beta = \frac{2N}{g_0^2}. \quad (1.46)$$

Wie man sieht, führt die Wilson-Wirkung im Kontinuumsimes auf die euklidische Yang-Mills-Wirkung.

3. Um die Theorie zu quantisieren, wird noch das erzeugende Integral

$$Z_E = \int \mathfrak{D}[U] e^{-S_E[U]} = \int \prod_{x \in \Lambda_E} \prod_{\mu=0}^3 dU_\mu(x) e^{-S_E[U]} \quad (1.47)$$

benötigt. Da die Linksvariablen Elemente der Gruppe selbst sind, ist das Integrationsmaß  $dU_\mu(x)$  ein invariantes Gruppenmaß einer kompakten Lie-Gruppe und kann damit normalisiert werden

$$\int_{SU(N)} dU = 1. \quad (1.48)$$

Das hat natürlich weitreichende Konsequenzen, denn man benötigt den Fadeev-Popov-Formalismus nicht mehr, was das Lösen der Theorie stark vereinfacht.

### 1.1.3 Formulierung der Gitter-QCD

Um die QCD auf dem Gitter zu formulieren, muss den Schritten aus den vorangegangenen Kapiteln gefolgt werden. Die Wirkung der QCD in euklidischer Raum-Zeit ist

$$S_{QCD} = \int d^4x \mathcal{L}_{QCD} = \int d^4x \left\{ \sum_{f=u,d,s,\dots} \bar{\Psi}_f (\gamma_\mu D_\mu + m_f) \Psi_f - \frac{1}{2g_0^2} \text{Tr}[F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \right\}, \quad (1.49)$$

wobei  $g_0$  die Kopplungskonstante ist und  $D_\mu$  die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu. \quad (1.50)$$

Hier wird Explizit über alle Quarks, über die Diracindizes und die Farben summiert. Die Quantisierung des Feldstärketensors auf dem Gitter ist ausführlich in Kapitel 1.1.3 behandelt worden und muss deswegen hier nicht noch einmal wiederholt werden. Die Quark und Antiquarkfelder werden, wie in der skalaren Theorie, mit den Gitterpunkten verknüpft und transformieren unter der Eichgruppe wie folgt

$$\Psi(x) \rightarrow g(x)\Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x)g(x)^{-1}. \quad (1.51)$$

Mit dem Transformationsverhalten der Linkvariablen kann eine diskretisierte Form der kovarianten Ableitung definiert werden

$$\nabla_\mu \Psi(x) \equiv \frac{1}{a} (U_\mu(x) \Psi(x + a\hat{\mu}) - \Psi(x)), \quad (1.52)$$

$$\nabla_\mu^* \Psi(x) \equiv \frac{1}{a} (\Psi(x) - U_\mu(x - a\hat{\mu})^{-1} \Psi(x - a\hat{\mu})), \quad (1.53)$$

wobei  $\nabla_\mu$  vorwärts und  $\nabla_\mu^*$  rückwärts wirkt. Die einfachste Möglichkeit den masselosen, diskreten Diracoperator  $D$  zu definieren ist

$$D_{disc} = \frac{1}{2} \gamma_\mu (\nabla_\mu + \nabla_\mu^*), \quad (1.54)$$

wobei es hier zu einigen Problemen kommt. Der Diracoperator sollte nämlich für alle Impulse außer für  $p = 0$  invertierbar sein, um ein korrektes Formionenspektrum zu erhalten.

Führt man jedoch eine Fouriertransformation aus, so ist der Diracoperator im Impulsraum gegeben als

$$\tilde{D}_{disc}(p) = i\gamma_\mu \frac{1}{a} \sin(ap_\mu) = i\gamma_\mu p_\mu + O(a^2). \quad (1.55)$$

Dieser Operator wird für alle Nullstellen des Sinus null und ist damit nicht ohne weiteres invertierbar. Dies ist das so genannte "fermion doubling problem", das Fermionen-Verdopplungs-Problem. In dem vorliegenden Fall bedeutet das, dass der Operator insgesamt 16 Pole hat und damit ein 16-fach entartetes Fermionenspektrum.

Eine zusätzliche Eigenschaft, die der masselose Diracoperator erfüllen sollte, ist die chirale Symmetrie, das heißt

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = 0, \quad (1.56)$$

wobei  $\gamma_5$  Projektionsoperatoren sind, die im nächsten Kapitel definiert werden. Es existiert allerdings ein No-Go-Theorem von NIELSEN und NINOMIYA [26], das besagt, dass der masselose Diracoperator auf dem Gitter nicht gleichzeitig lokal und invertierbar ist, der chiralen Symmetrie gehorcht und das richtige Kontinuumverhalten hat. Eine Möglichkeit dieses Theorem zu umgehen ist die Ginsparg-Wilson-Relation, die die Forderung der chiralen Symmetrie aus Gleichung 1.56 modifiziert zu

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = a D \gamma_5 D. \quad (1.57)$$

Ein Operator, der diese Gleichung erfüllt, gehorcht gleichzeitig dem Atiyah-Singer-Index-Theorem [13]

$$\{\gamma_5, D\} = a D \gamma_5 D \quad \Leftrightarrow \quad \text{index}(D) = a^5 \sum_{x \in \Lambda_E} \frac{1}{2} \text{Tr}[\gamma_5 D] = n_- - n_+ \quad (1.58)$$

und zwar so, dass der Diracoperator genau  $|n_- - n_+|$  chirale Nullmoden enthält. Außerdem erzeugt ein Operator, der Gleichung 1.57 gehorcht, die richtige chirale Anomalie des axialen Singulettstroms der chiralen Symmetrie (Kapitel 1.2). Alle wichtigen Relationen sind also mit Gleichung 1.57 erfüllt, damit das richtige Verhalten im chiralen Grenzfall reproduziert werden kann.

Es gibt noch weitere Probleme, die eher von technischer Natur sind. Es können zum Beispiel durch Simulationen keine unendlich großen Raumbereiche und Impulse abgedeckt werden, was zur Folge hat, dass Volumeneffekte und Gitter-Artefakte entstehen.

Diese Fehler können kontrolliert werden, so lange die Ungleichungen

$$\frac{1}{a m_{\text{had}}} \ll \frac{L}{a}, \quad m_{\text{had}} \ll a^{-1} \quad (1.59)$$

erfüllt werden. Hierbei ist  $m_{\text{had}}$  die Masse eines beliebigen Hadrons, welche mit einer Simulation berechnet werden soll. Die linke Ungleichung sagt aus, dass die Korrelationslänge des Hadrons klein gegenüber der Ausdehnung des Raumbereichs der Simulation sein muss, da ansonsten sehr große Volumeneffekte zu erwarten sind. Außerdem soll nach der rechten Ungleichung die Masse des Hadrons klein gegenüber des inversen Gitterabstands sein, um Gitterartefakte zu vermeiden.

Ein Problem, welches eher auf die verwendeten Algorithmen als auf Volumeneffekte oder Gitterartefakte zurückzuführen ist, ist, dass nicht beliebig kleine Quarkmassen simuliert werden können. Das hängt damit zusammen, dass die Eigenwerte des Diracoperators bei kleinen Quarkmassen sehr klein werden und dadurch nur schwer zu simulieren sind. Eine Grenze für die meisten Formulierungen des Diracoperators ist die halbe Strangequarkmasse. Um auch Bereiche mit kleinen Quarkmassen erreichen zu können, kann mit Hilfe der chiralen Störungstheorie extrapoliert werden.

Es existieren unterschiedliche Formulierungen des masselosen Diracoperators auf dem Gitter, die die aufgezeigten Probleme mehr oder weniger gut umgehen. Alle diese Formulierungen nutzen aus, dass nur das richtige Kontinuum-Grenzverhalten erzeugt werden muss und man ansonsten in seiner Formulierung auf dem Gitter frei ist.

Eine Möglichkeit den Diracoperator zu definieren, ist allerdings besonders interessant, da sie die chirale Symmetrie der QCD explizit erhält, kein Verdopplungs-Problem hat und die Gitterartefakte von der Ordnung  $a^2$  sind. Diese Formulierung des Operator stammt von NEUBERGER und ist nach ihm benannt. Der so genante Neuberger-Operator ist gegeben als [25], [24] :

$$D_N = \frac{1}{\bar{a}} \left( 1 - \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}} \right), \quad A = 1 + s - aD_W, \quad \bar{a} = \frac{a}{1+s}. \quad (1.60)$$

Hierbei ist  $|s| < 1$  ein frei wählbarer Parameter und  $D_W$  der masselose Wilson-Dirac-Operator

$$D_W = \frac{1}{2} \gamma_\mu (\nabla_\mu + \nabla_\mu^*) + ar \nabla_\mu^* \nabla_\mu, \quad (1.61)$$

wobei  $r$  meist eins gesetzt wird.

Der Neuberger-Operator kann umgeschrieben werden zu

$$D_N = \frac{1}{a}(1 + \gamma_5 \text{sign}(Q)), \quad (1.62)$$

indem die neue Größe  $Q = \gamma_5 A$  definiert wird. Allerdings hat die Verwendung des Neuberger-Operators auch Nachteile. Zum Beispiel ist die Umsetzung der Signumfunktion in einer Computersimulation sehr aufwendig und teuer. Außerdem ist die Lokalität nur bis zu einem Gitterabstand von  $a \approx 0,13 \text{ fm}$  gesichert [18].

Um einen noch tieferen Einblick in die Gitter-QCD zu gewinnen, sei auf den Handbucharikel von Hartmut Wittig [30] verwiesen.

## 1.2 Chirale Störungstheorie

Die chirale Störungstheorie wird in der Literatur meist in Minkowski-Metrik definiert, weshalb in diesem Abschnitt dieser Konvention gefolgt wird.

Betrachtet man die Lagrangedichte der QCD, so stellt man fest, dass sie eine zufällige, globale Symmetrie besitzt, wenn die Quarkmassen gegen Null geschickt werden. Dabei lassen sich die Quarks wie folgt aufteilen

$$\begin{pmatrix} m_u \\ m_d \\ m_c \end{pmatrix} \ll 1 \text{ GeV} \ll \begin{pmatrix} m_c \\ m_b \\ m_t \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Im Folgenden wird sich nur auf die drei leichtesten Quarks beschränkt, da diese für die chirale Störungstheorie ausreichend sind. Setzt man die Massen dieser Quarks auf null so erhält man die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = i\bar{q}Dq - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a}. \quad (1.64)$$

Diese Schreibweise ist extrem verkürzt, denn alle Summen sind unterdrückt. Explizit wird hier über die Farben, über die Flavours und über die DiracIndizes summiert. Die Ableitung  $D$  wirkt nur auf die Farb- und die DiracIndizes, aber nicht auf die FlavourIndizes.

Wendet man die Projektionsoperatoren

$$q = \left[ \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \right] q = [P_R + P_L] q =: q_R + q_L \quad (1.65)$$

auf die Lagrangedichte an, so zerfällt sie in einen rechthändigen und einen linkshändigen Anteil

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = i\bar{q}_R Dq_R + i\bar{q}_L Dq_L - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a}. \quad (1.66)$$

Die gesamte Lagrangedichte ist dadurch invariant unter einer klassischen, globalen  $U(3)_L \times U(3)_R$  Symmetrie. Wird die Gell-Mann-Lévy-Methode auf diese Lagrangedichte angewendet [6], also die globale Symmetrie zu einer lokalen gemacht, so erhält man die 18 Symmetrieströme

$$V_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a^f}{2} q, \quad (1.67)$$

$$A_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a^f}{2} q, \quad (1.68)$$

$$V^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q, \quad (1.69)$$

$$A^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q. \quad (1.70)$$

Bis auf den Axialen Singulettstrom, der wegen Quanteneffekten nicht erhalten ist [19], sind alle Ströme im chiralen Grenzfall erhalten. Das heißt, dass die zugrunde liegende Symmetrie eine  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$  ist. Auch der korrespondierende Hamiltonoperator ist invariant unter dieser Symmetrie und vertauscht mit den Ladungsoperatoren

$$Q_L^a(t) = \int d^3x q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a^f}{2} q_L(t, \vec{x}), \quad a = 1, \dots, 8, \quad (1.71)$$

$$Q_R^a(t) = \int d^3x q_R^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a^f}{2} q_R(t, \vec{x}), \quad a = 1, \dots, 8, \quad (1.72)$$

$$Q_V(t) = \int d^3x \left[ q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a^f}{2} q_L(t, \vec{x}) + q_R^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a^f}{2} q_R(t, \vec{x}) \right], \quad (1.73)$$

welche für erhaltenen Ströme zeitunabhängig sind. Die Matrizen  $\lambda_a$  sind die acht Gellman-Matrizen.

Diese Symmetrie kann explizit gebrochen werden, wenn man die Quarkmassen anschaltet.

Dies hat zur Folge, dass im Falle  $m_u = m_d = m_s = m$  nur noch der Vektorstrom und der Singulettvektorstrom erhalten sind. Hebt man diese Symmetrie auch noch auf, haben also alle drei Quarks unterschiedliche Masse, so ist nur noch der Singulettvektorstrom erhalten, der im Wesentlichen der Baryonenzahlerhaltung entspricht.

### 1.2.1 Spontane Symmetriebrechung und Goldstone-Bosonen

Um die spontane Symmetriebrechung im chiralen Grenzfall der QCD verstehen zu können, ist es sinnvoll mit einfachen klassischen Beispielen zu beginnen.

Eines der einfachsten Beispiele ist ein senkrecht stehender Stab. Dieser kann um die Längsachse um einen beliebigen Winkel gedreht werden, ohne dass sich sein Aussehen ändert. Wird senkrecht von oben mit einer konstanten Kraft  $F$  auf diesen Stab gedrückt, so passiert so lange nichts, bis man eine kritische Kraft  $F_{crit}$  erreicht. Der Stab gibt dann nach und biegt sich durch, wodurch man einen neuen Grundzustand erhält. Allerdings gibt es unendlich viele dieser Grundzustände, die alle entartet sind und durch Drehungen ineinander überführbar sind. Das bedeutet nun, dass durch einen Parameter, hier die Kraft, der einen kritischen Wert annimmt, das Gleichgewicht unstabil wird. Es entstehen entartete Grundzustände.

Ein etwas näher an der QCD liegendes Beispiel ist die spontane Symmetriebrechung einer skalaren Lagrangedichte mit der aus dem vorangegangenen Kapitel bekannten  $\Phi^4$ -Wechselwirkung

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \Phi^4. \quad (1.74)$$

Die zugehörige Energiedichte ist schnell mit einer Legendre-Transformation bestimmt

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \underbrace{\frac{m^2}{2} \Phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi^4}_{\mathcal{V}(\Phi)}. \quad (1.75)$$

Damit  $\mathcal{H}$  nach unten beschränkt ist, muss  $\lambda > 0$ . Allerdings bleibt  $m$  ein freier Parameter, der auch negative Werte annehmen kann.

Der interessante Fall, der sich einstellen kann, ist der Nambu-Goldstone-Modus mit zwei Minima  $\pm \Phi_0 := \pm \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}$  für  $m^2 < 0$ . In der quantisierten Theorie gibt es an diesen Stellen die entarteten Grundzustände  $|0, +\rangle$  und  $|0, -\rangle$ .

Diese haben allerdings unterschiedliche Vakuumerwartungswerte für den Feldoperator:

$$\langle 0, + | \Phi(x) | 0, + \rangle = \langle 0, + | e^{iPx} \Phi(0) e^{-iPx} | 0, + \rangle = \langle 0, + | \Phi(0) | 0, + \rangle =: \Phi_0, \quad (1.76)$$

$$\langle 0, - | \Phi(x) | 0, - \rangle =: -\Phi_0. \quad (1.77)$$

Hier wurde sowohl die Translationsinvarianz ausgenutzt, als auch, dass der Grundzustand ein Eigenzustand des Energie-Impuls-Operators  $P$  ist. Mit der Einführung eines Projektionsoperators kann man sehen, wie die zugrunde liegende Symmetrie spontan gebrochen wird. Der unitäre Operator  $\mathcal{R}$  soll die Felder in folgender Weise transformieren:

$$\mathcal{R} : \Phi \rightarrow \Phi' = -\Phi \quad (1.78)$$

und die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2 &= 1 \\ \mathcal{R} &= \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^\dagger \end{aligned} \quad (1.79)$$

besitzen. Das bedeutet, wenn  $\mathcal{R}$  auf die Grundzustände wirkt, überführt er jeweils den einen in den anderen

$$\mathcal{R} |0, \pm\rangle = |0, \mp\rangle. \quad (1.80)$$

Wird eines der beiden Minima ausgewählt und bezüglich  $\pm\Phi_0$  entwickelt

$$\begin{aligned} \Phi &= \pm\Phi_0 + \Phi' \\ \partial_\mu \Phi &= \partial_\mu \Phi', \end{aligned} \quad (1.81)$$

so erhält man für das Potential

$$\mathcal{V}(\Phi) = \mathcal{V}(\Phi') = -\frac{\lambda}{4}\Phi_0^4 + \frac{1}{2}(-2m^2)\Phi'^2 \pm \lambda\Phi_0\Phi'^3 + \frac{\lambda}{4!}\Phi'^4. \quad (1.82)$$

Daraus kann die Lagrangedichte für  $\Phi'$  abgeleitet werden:

$$\mathcal{L}'(\Phi', \partial_\mu \Phi') = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi' \partial^\mu \Phi' - \frac{1}{2}(-2m^2)\Phi'^2 \mp \lambda\Phi_0\Phi'^3 - \frac{\lambda}{4!}\Phi'^4 + \frac{\lambda}{4!}\Phi_0^4. \quad (1.83)$$

Wirklich interessant wird es, wenn man eine Lagrangedichte annimmt, die mehrere Felder hat und invariant unter einer nichtabelschen Symmetrie ist.

Das ist zum Beispiel der Fall bei

$$\mathcal{L}(\vec{\Phi}, \partial_\mu \vec{\Phi}) = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - \frac{m^2}{2} \Phi_i \Phi_i - \frac{\lambda}{4!} (\Phi_i \Phi_i)^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.84)$$

Auch hier soll wieder gelten, dass

$$m^2 < 0, \quad \lambda > 0, \quad \Phi_i \in \mathbb{R}. \quad (1.85)$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter Drehungen der Felder

$$g \in SO(3) : \Phi_i \mapsto \Phi'_i = D_{ij}(g) \Phi_j = (e^{-i\alpha_k T_k})_{ij} \Phi_j. \quad (1.86)$$

Damit die  $\Phi'_i$  reell sind, müssen die hermiteschen  $T_k$  rein imaginär und damit antisymmetrisch sein. Die  $T$  bilden eine Basis einer Darstellung der Lie-Algebra  $so(3)$  mit den gewohnten Vertauschungsrelationen  $[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k$ .

Wie bei dem vorangegangenen Beispiel wird zuerst das Minimum des Potentials

$$|\vec{\Phi}_{min}| = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \equiv v \quad (1.87)$$

berechnet.  $\vec{\Phi}_{min}$  kann in jede Richtung des Isospinraumes zeigen, das heißt, man hat hier eine überabzählbare Anzahl von Grundzuständen. Jede kleinste Störung, welche nicht invariant bezüglich  $SO(3)$  ist, wählt einen Grundzustand aus. Da die Grundzustände entartet sind, sei angenommen, der ausgewählte Grundzustand zeige in  $\hat{e}_3$ -Richtung. Durch diese Wahl ist der Grundzustand nicht mehr invariant unter der vollständigen Symmetriegruppe. Das heißt,  $T_1$  und  $T_2$  vernichten den Grundzustand nicht. Für die konkrete Wahl

$$\vec{\Phi}_{min} = v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

erhält man

$$T_1 \Phi_{min} = v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
T_2 \Phi_{min} &= v \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
T_3 \Phi_{min} &= v \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned} \tag{1.89}$$

Wie man sieht, vernichtet nur noch  $T_3$  den Grundzustand, was gleichbedeutend ist, dass  $|\vec{\Phi}_{min}|$  invariant bezüglich einer Untergruppe  $H$  von  $G$  ist, nämlich einer Drehung um  $\hat{e}_3$ .

$$H : \vec{\Phi}' = D(h)\vec{\Phi} = e^{-i\alpha_3 T_3} \vec{\Phi} \tag{1.90}$$

Auch hier kann man wieder um den Grundzustand entwickeln

$$\Phi_3 = v + \chi. \tag{1.91}$$

Das alte Feld  $\Phi_3(x)$  wird durch das neue Feld  $\chi(x)$  ersetzt. Das Potential lässt sich wieder durch die neuen Felder ausdrücken.

$$\mathcal{V}' = \frac{1}{2} (-2m^2) \chi^2 + \lambda v \chi (\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2) + \frac{\lambda}{4} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{4} v^4 \tag{1.92}$$

Besonders fällt auf, dass nur noch  $\chi$  quadratisch auftritt. Das bedeutet, dass  $m_{\Phi_1} = m_{\Phi_2} = 0$  und  $m_\chi = -2m^2$ . Die beiden masselosen Teilchen werden auch Goldstone-Bosonen genannt.

*Allgemein gilt, dass für jedes  $T$ , welches den Grundzustand nicht vernichtet, ein masseloses Goldstone-Boson existiert.*

Der Beweis wird hier nicht aufgeführt, allerdings ist er in [27] zu finden.

Es kann sich noch gefragt werden, was passiert, wenn die Symmetrie explizit gebrochen wird. Dazu kann zum Beispiel einen zusätzlichen Term der Form  $a\Phi_3$  in das Potential der Lagrangedichte eingebaut werden

$$\mathcal{V}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \frac{m^2}{2} \Phi_i \Phi_i + \frac{\lambda}{4} (\Phi_i \Phi_i)^2 + a\Phi_3. \tag{1.93}$$

Dieses Potential besitzt nur noch eine  $O(2)$ -Symmetrie. Die Bedingungen für das neue Minimum erhält man aus  $\vec{\nabla}_\Phi \mathcal{V} = 0$ . Sie lauten

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0; \quad \lambda \Phi_3^3 + m^2 \Phi_3 + a = 0. \tag{1.94}$$

Mit Hilfe von Störungstheorie kann die Lösung nullter Ordnung und die erster Korrektur dieser kubischen Gleichung angegeben werden:

$$\Phi_3^{(0)} = \pm \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}; \quad \Phi_3^{(1)} = \frac{1}{2m^2}. \quad (1.95)$$

Die Bedingung für das Minimum schließt allerdings  $\Phi_3^{(0)} = +\sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}$  aus. Das Potential kann um  $\Phi_3 = \langle \Phi_3 \rangle + \chi$  entwickelt werden, was zur Folge hat, dass die Goldstone-Bosonen eine Masse

$$m_{\Phi_1}^2 = m_{\Phi_2}^2 = a \sqrt{\frac{\lambda}{-m^2}}, \quad m_\lambda^2 = -2m^2 + 3a \sqrt{\frac{\lambda}{-m^2}} \quad (1.96)$$

erhalten, deren Quadrat proportional zu dem Parameter  $a$  ist.

### 1.2.2 Spontane Symmetriebrechung in der QCD

Es gibt verschiedene Anzeichen dafür, dass die QCD eine spontane Symmetriebrechung aufweist. Das Augenscheinlichste sollten masselose oder aber, für den Fall einer expliziten Symmetriebrechung, sehr leichte Teilchen sein, die sich in einem Multiplett anordnen und mit den Goldstone-Bosonen identifiziert werden könnten. Die Symmetrie im chiralen Grenzfall ist eine  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie, was zur Folge hat, dass es links- und rechtshändige Ladungsoperatoren gibt, welche mit  $H_{QCD}^0$  vertauschen. Diese Ladungsoperatoren würden Teilchen erzeugen, welche entartet wären, allerdings entgegengesetzte Parität besäßen. Dies ist auch unter dem Stichwort Paritätsverdopplung bekannt.

Die QCD besitzt tatsächlich ein Multiplett mit sehr leichten Teilchen, den Mesonen. Es existiert allerdings nur ein Multiplett mit negativer Parität und keines mit positiver, was die Vermutung nahelegt, dass die Ladungsoperatoren  $Q_A^a$  den Grundzustand nicht vernichten. Wird angenommen, dass  $a_i^+$  den Zustand  $|i, +\rangle$  und  $b_i^+$  den Zustand  $|i, -\rangle$  erzeugen und dass  $[Q_A^0, a_i^+] = -t_{ij}^a b_j^+$  gilt, so folgt

$$Q_A^a |i, +\rangle = Q_A^a a_i^+ |0\rangle = ([Q_A^0, a_i^+] + a_i^+ \underbrace{Q_A^a}_{=0} |0\rangle) = -t_{ij}^a b_j^+ |0\rangle, \quad (1.97)$$

sofern der Grundzustand von  $Q_A^a$  nicht vernichtet wird. Ist dies allerdings nicht mehr der Fall, so ist der Grundzustand nicht mehr invariant unter der vollen Symmetriegruppe, wie an Gleichung 1.97 ersichtlich ist. Dies ist gleichbedeutend mit einer spontanen Symmetriebrechung, welche Goldstone-Bosonen erzeugt. Diese Goldstone-Bosonen  $\Phi^a(x)$  besitzen Spin null und müssen sich wie  $Q_A^a$  transformieren. Von VAFA und WITTEN wurde gezeigt [29], dass der Grundzustand im chiralen Grenzfall von den Ladungsoperatoren  $Q_V^a$  immer vernichtet wird und damit invariant unter  $SU(3)_V \times U(1)_V$  ist.

Es gibt noch einen hinreichenden aber nicht notwendigen Grund für eine spontane Symmetriebrechung in der QCD. Das nichtverschwindende Singulett-Quarkkondensat  $\langle \bar{q}q \rangle$ . Der Kommutator der Quarkdichten

$$S_a(y) = \bar{q}(y)\lambda_a q(y), \quad a = 0, \dots, 8 \quad (1.98)$$

$$P_a(y) = \bar{q}(y)\gamma_5\lambda_a q(y), \quad a = 0, \dots, 8 \quad (1.99)$$

mit den Ladungsoperatoren  $Q_V^a$  ist

$$[Q_V^a(t), S_0(y)] = 0, \quad (1.100)$$

$$[Q_V^a(t), S_b(y)] = if_{abc}S_c(y), \quad a = 1, \dots, 8 \quad (1.101)$$

welche auch bei spontaner Symmetriebrechung erhalten bleiben.  $\lambda_0$  ist hier die Einheitsmatrix. Die Kommutatorrelation des Oktetts kann so umgeformt werden, dass die skalare Quarkdichte in Abhängigkeit der Ladungsoperatoren geschrieben werden kann, nämlich

$$S_a(y) = -\frac{i}{3} \sum_{b,c=1}^8 [Q_V^b(t), S_c(y)], \quad (1.102)$$

woran leicht ersichtlich ist, dass  $S_a(y)$  den Grundzustand wegen der noch vorhandenen  $SU(3)_V$ -Symmetrie vernichtet, d.h

$$\langle 0|S_a(y)|0\rangle = \langle 0|S_a(0)|0\rangle \equiv \langle S_a \rangle = 0 \quad a = 1, \dots, 8. \quad (1.103)$$

Daraus folgt, dass die Oktettkomponenten des skalaren Quarkkondensates verschwinden müssen. Für  $a = 3$  gilt dann

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle, \quad (1.104)$$

und für  $a = 8$

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle. \quad (1.105)$$

Für das skalare Quarkkondensat kann diese Rechnung nicht gemacht werden, da sie mit dem Ladungsoperator vertauscht. Deshalb liegt die Annahme nahe, dass das skalare Quarkkondensat nicht verschwindet und man erhält mit Gleichung 1.105

$$0 \neq \langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s \rangle = 3 \langle \bar{u}u \rangle = 3 \langle \bar{d}d \rangle = 3 \langle \bar{s}s \rangle. \quad (1.106)$$

Interessant ist die Wirkung der Ladungsoperatoren  $Q_A^a$  bei nichtverschwindendem skalarem Quarkkondensat auf einen Grundzustand, der invariant unter  $SU(3)_V$  ist. Das heißt, die Wirkung des Kommutators

$$i[Q_A^a(t), P_a(y)] = \begin{cases} \bar{u}u + \bar{d}d, & a = 1, 2, 3 \\ \bar{u}u + \bar{s}s, & a = 4, 5 \\ \bar{d}d + \bar{s}s, & a = 6, 7 \\ \frac{1}{3}\bar{u}u + \bar{d}d + 4\bar{s}s, & a = 8 \end{cases} \quad (1.107)$$

auf den Grundzustand ist von Interesse

$$\langle 0|i[Q_A^a(t), P_a(y)]|0\rangle = \frac{2}{3} \langle \bar{q}q \rangle. \quad (1.108)$$

In Analogie zum vorherigen Kapitel bedeutet das, dass sowohl die pseudoskalare Dichte als auch der axiale Ladungsoperator ein nichtverschwindendes Matrixelement zwischen dem Vakuum und masselosen Einteilchenzuständen  $|\Phi^b\rangle$  haben müssen. Dieses Matrixelement kann als

$$\langle 0|A_\mu^a(0)|\Phi^b(p)\rangle = ip_\mu F_0 \delta^{ab} \quad (1.109)$$

geschrieben werden, wobei  $F_0 \approx 93MeV$  die Zerfallskonstante der Goldstone-Bosonen im chiralen Grenzfall ist.

### 1.2.3 Die Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie

Wie im vorangegangenen Kapitel gezeigt wurde, entsprechen die leichtesten pseudoskalaren Mesonen den Goldstone-Bosonen der QCD. Sie ordnen sich in einem Meson-Oktett an und entkoppeln vollständig von der QCD. Das bedeutet, dass sich zum Beispiel eine Pion-Pion-Streuung nur durch die Goldstone-Bosonen selber beschreiben lässt. Es muss nicht auf die Wechselwirkung von Quarks und Gluonen zurückgegriffen werden.

Die Goldstone-Bosonen sollten also mit einer eigenen Lagrangedichte beschrieben werden können, die im chiralen Grenzfall invariant unter  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$  ist und auch sonst alle Symmetrien der QCD beinhalten. Da die chirale Symmetrie ja spontan gebrochen ist, sollten sich die Goldstone-Bosonen unter  $SU(3)_V$  wie ein Oktett transformieren. Um das richtige Transformationsverhalten und damit die Gestalt der neuen Felder zu bestimmen, benötigt man eine nichtlineare Realisierung der Symmetriegruppe. Wie die Struktur der Felder genau abgeleitet werden kann, ist zum Beispiel in [27] zu finden.

Die neuen Freiheitsgrade haben die Gestalt einer  $SU(3)$ -Matrix, nämlich

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\Phi(x)}{F_0}\right), \quad (1.110)$$

$$\Phi(x) = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \Phi_a(x) \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{K^-} & \sqrt{2}K^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}, \quad (1.111)$$

wobei  $F_0$  zunächst ein freier Parameter ist, der durch zum Beispiel den Pionzerfall bestimmt werden kann [27]. Mit diesen Feldern kann eine Lagrangedichte erzeugt werden, die alle Symmetrieeigenschaften besitzt, die gefordert werden. Die Lagrangedichte mit der kleinsten Anzahl an Ableitungen ist

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[\partial_\mu U(x)\partial^\mu U(x)]. \quad (1.112)$$

Werden die Felder  $U(x)$  entwickelt, so entsteht in erster Ordnung die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi_a \partial^\mu \Phi_a + \mathcal{L}_{int} \quad (1.113)$$

In Kapitel 1.2.1 wurde gezeigt, dass eine Anwesenheit der Quarkmassen dazu führt, dass die Goldstone-Bosonen Massen erhalten. Da die Mesonen eine Masse besitzen, sollte auch ein Term in der Lagrangedichte vorkommen, der dem Rechnung trägt. Wird angenommen, dass die Massenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad (1.114)$$

welche eigentlich eine konstante Matrix ist, sich wie die Felder transformiert, so kann ein weiterer Term der Lagrangedichte erzeugt werden, der die Symmetrie allerdings explizit bricht, nämlich

$$\mathcal{L}_{s.b.} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr}(MU^\dagger + UM^\dagger). \quad (1.115)$$

Die Konstante  $B_0$  ist mit dem chiralen Singulett-Quarkkondensat durch die Relation

$$3F_0^2 B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle \quad (1.116)$$

verbunden.

Zu guter Letzt braucht man noch eine Möglichkeit, die Terme entsprechend ihrer Ordnung zu sortieren. Erst einmal steht ja nicht fest, dass ein Term in der Lagrangedichte mit zum Beispiel vier Ableitungen eine andere Ordnung haben sollte, wie einer mit sechs. Das heißt, es wird ein Zählschema benötigt. Das in der chiralen Störungstheorie benutzte ist das Weinbergsche Zählschema, welches durch eine Betrachtung der Feynmangraphen der einzelnen Terme der Lagrangedichte hergeleitet werden kann [27]. Im Wesentlichen werden die einzelnen Terme nach Impulsen sortiert, das heißt

$$\partial_\mu \sim O(p), \quad m_q \sim O(p^2), \quad (1.117)$$

wobei  $m_q$  stellvertretend für eine Quarkmasse steht. Damit ist die Lagrangedichte niedrigster Ordnung, also  $O(p^2)$ , die alle Symmetrien enthält

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{eff} + \mathcal{L}_{s.b.} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[\partial_\mu U(x)\partial^\mu U(x)] + \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr}(MU^\dagger + UM^\dagger). \quad (1.118)$$

Mit dieser Lagrangedichte können viele Eigenschaften der Mesonen beschrieben werden, wie der Pionzerfall, die Pion-Pion-Streuung und die Massen der Mesonen. Um allerdings genauere Ergebnisse zu erhalten, braucht man die Lagrangedichte der nächst höheren Ordnung. Da sie in dieser Arbeit wegen des anderen Zählschemas im Epsilonregime (siehe Kapitel 1.3) nicht benötigt wird, wird sie hier nicht explizit aufgeführt. Insgesamt können zwölf Terme konstruiert werden, die die Ordnung  $p^4$  haben und alle die richtigen Symmetrieeigenschaften haben. Jeder dieser Terme trägt eine eigene freie Konstante, wie es auch schon bei der Lagrangedichte niedrigster Ordnung war. Dort waren es  $F_0$  und  $B_0$ , die durch einen Vergleich mit experimentellen Daten bestimmt werden mussten. Das heißt, in der nächst höheren Ordnung treten 12 Konstanten auf, die auf dieselbe Weise bestimmt werden müssen.

Dies ist auch der größte Nachteil, den die chirale Störungstheorie hat. Aus diesem Grund liegt eine Verknüpfung mit der Gitter-QCD nahe, denn durch sie kann man die Konstanten aus der chiralen Störungstheorie mit Hilfe der QCD nicht perturbativ ableiten, ohne Experimente bemühen zu müssen. Wie genau die Verknüpfung zwischen diesen beiden Theorien vonstatten geht, wird in den Kapiteln 1.4 und 2 genauer erläutert werden.

### 1.3 Regime der chiralen Störungstheorie

Um eine Verknüpfung zwischen Gitter-QCD und chiraler Störungstheorie zu schaffen, muss man sich zunächst zweier Dinge bewusst werden. Gittersimulationen können keinen unendlichen Raumbereich abdecken und werden fast ausschließlich in einer euklidischen Raum-Zeit definiert. Die Lagrangedichte aus Gleichung 1.118 ist allerdings in einem unendlichen Raumbereich definiert und außerdem nicht euklidisch. Um also eine Verbindung zwischen den beiden Theorien zu schaffen, muss die Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie zum einen im euklidischen Raum definiert werden und zum anderen auf ein bestimmtes Raum-Zeit-Volumen begrenzt werden.

Der Übergang von der Minkowski- zur euklidischen Metrik kann einfach durch eine Wickrotation vollzogen werden. Bei der Eingrenzung auf ein bestimmtes Raumvolumen muss zwischen verschiedenen kinetischen Regimen unterschieden werden, da diese unterschiedliche Simulationsmethoden benötigen [17].

Um den Übergang zu einem endlichen Raumvolumen  $V$  zu vollziehen, wird für den Raumbereich ein Torus mit der Längenskala  $L = V^{\frac{1}{4}}$  angenommen. Das Problem bei diesem Übergang ist, dass die spontane Symmetriebrechung verloren geht. Werden die Quarkmassen Null gesetzt, so verschwindet das chirale Quarkkondensat im endlichen Volumen, welches ja ein hinreichendes Kriterium für die spontane Symmetriebrechung ist. Allerdings ist der Übergang zu einem unendlichen Volumen bei Quarkmassen, welche nicht null sind, fließend. Ist der Raumbereich groß gegenüber der Comptonwellenlänge des Pions, also des leichtesten Goldstone-Bosons, verhält sich das System, als sei es in einem unendlichen Volumen. Andererseits kann natürlich das Volumen festgehalten und die Quarkmassen gegen null geschickt werden, was die spontane Symmetriebrechung wieder herstellt. Dies kann nur funktionieren, wenn die Quarkmassen von der Ordnung  $1/V$  sind.

Im Folgenden soll das Volumen groß gegenüber der QCD-Skala sein. Das hat zur Folge, dass in niedrigster Ordnung dieselbe Lagrangedichte wie im vorangegangenen Kapitel vorliegt. Dies kann sich allerdings durch die anderen Zählschemata, die noch eingeführt werden, ändern. Da hier allerdings alles in einem endlichen Volumen behandelt wird, ist der Pionimpuls  $p$  nicht kontinuierlich, sondern entsprechend

$$p_\mu = \frac{2\pi}{L_\mu} n_\mu \quad n_\mu \in Z \quad (1.119)$$

gequantelt. Entwickelt wird im Pionimpuls und der Pionmasse  $m_\pi$  im Verhältnis zum chiralen Cutoff  $\Lambda \simeq 4\pi F$ . Daraus folgt die Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{XPT}} = \frac{F^2}{4} \text{Tr}[\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger] - \frac{m\Sigma}{2} \text{Tr}[e^{\frac{i\theta}{N_f}} U + U^\dagger e^{\frac{-i\theta}{N_f}}] + O\left(\frac{p}{\Lambda}\right)^4. \quad (1.120)$$

wobei die Quarkmassenmatrix als diagonal angenommen wird und für  $F_0^2 B_0$  abkürzend  $\Sigma$  steht. Der Vakuumwinkel  $\theta$  tritt hier explizit auf, da alles in einem endlichen Volumen definiert ist und deshalb die Topologie der Eichfelder berücksichtigt werden muss [21].

Wird der quadratische Term der Wirkung in der Standardentwicklung  $U = 1 + i\sqrt{(2)}\xi/F + \dots$  in der Impulsdarstellung berechnet

$$S = \frac{V}{2}(p^2 + m_\pi^2) \text{Tr}[\xi_p^2], \quad (1.121)$$

so werden die Schwankungen der Felder  $\xi(x)$  gedämpft. Diese Dämpfung ist von der Größenordnung

$$O\left(\frac{1}{V(p^2 + m_\pi^2)}\right) \sim O\left(\frac{1}{Vm_\pi^2}\right). \quad (1.122)$$

Ist  $L$  von der Größenordnung der Pionwellenlänge  $\frac{1}{m_\pi}$ , so verhält sich das System im endlichen Volumen im Prinzip so, wie im unendlichen, das heißt, die typische Impulsskala ist  $p \sim m_\pi$ . Für  $m_\pi \gg 1/L$  sind die Schwankungen viel kleiner als  $1/L^2$  und die Entwicklung um die klassische Lösung ist eine Entwicklung in einer Größe, die viel kleiner ist als  $1/(LF)^2 \ll 1$ . Wird aber die Quarkmasse oder das Volumen kleiner, so treten Volumeneffekte auf. Kann allerdings sichergestellt werden, dass  $m_\pi L \geq 1$ , kann weiterhin die Standardentwicklung benutzt werden. Im Grenzfall, wenn also  $m_\pi L \sim 1$ , wird die Entwicklung um den klassischen Grenzfall von  $U(x)$  und die Entwicklung in  $p$  von der selben Ordnung  $1/FL$  sein. Diese Entwicklung findet im so genannten  $p$ -Regime statt, in dem folgendes Zählschema gilt

$$\frac{|\xi_p|}{F} \sim \frac{m_\pi}{\Lambda} \sim \frac{p}{\Lambda} \sim \frac{1}{LF}. \quad (1.123)$$

Wird die Pionmasse oder das Volumen weiter verringert, so dass die Comptonwellenlänge des Pions größer wird als die Länge des Raumbereiches, kann nicht mehr im  $p$ -Regime entwickelt werden, da Pionen mit Impuls null auftreten können. Wird in Gleichung 1.121  $m_\pi L^2 \sim 1$ , sind die Schwankungen der Pionen mit Impuls null, der so genannten Nullmoden  $\xi_0^2$ , von der Ordnung  $O(1)$  und sie können nicht mehr entwickelt werden. Allerdings sind die Schwankungen der nicht-Nullmoden von der Ordnung

$$O\left(\frac{1}{Vp^2}\right) < O\left(\frac{1}{L^2}\right), \quad (1.124)$$

was bedeutet, dass diese auch weiterhin noch perturbativ behandelt werden können. Diese Entwicklung findet im so genannten Epsilonregime statt, in dem folgendes Zählschema gilt

$$\frac{m_\pi}{\Lambda} \sim \frac{p^2}{\Lambda^2} \sim \frac{1}{L^2 F^2} \sim \epsilon^2. \quad (1.125)$$

Ein interessanter Effekt des Epsilonregimes ist, dass auch bei Berechnungen der nachführenden Ordnung nur die Niederenergiekonstanten der Lagrangedichte der führenden Ordnung auftreten. Dies macht das Epsilonregime zu einer beliebigen Möglichkeit, chirale Störungstheorie im endlichen Volumen zu betreiben.

Da die Schwankungen der Nullmoden von der Ordnung  $O(1)$  sind, liegt es nahe, die Nullmoden zu separieren. Das heißt, das Feld  $U(x)$  wird in einen konstanten Teil  $U_0$  und in einen  $x$ -abhängigen Teil  $\xi(x)$  wie folgt aufgespalten

$$U(x) = U_0 \exp\left\{i\frac{2\xi(x)}{F}\right\}. \quad (1.126)$$

Welche Konsequenzen das für die Lagrangedichte und vor allem für das erzeugende Funktional haben wird, wird ausführlich in Kapitel 3 besprochen.

Es ist auch möglich, eine Verbindung zwischen dem  $p$ -Regime und dem Epsilonregime zu schaffen. Dies geschieht, wenn  $FL \gg 1$  und die Quarkmassen im Bereich  $m_\pi L \sim 1$  liegen. In diesem Bereich ist  $m\Sigma V \sim (FL)^2(m_\pi L)^2 \gg 1$  und die Ergebnisse sind im Epsilonregime dieselben wie im  $p$ -Regime, wenn dort  $m\Sigma V$  groß ist. Außerdem ist es möglich, verschiedene Quarks in verschiedenen Regimen zu behandeln. In [2] werden zum Beispiel  $u$ - und  $d$ -Quarks im Epsilonregime behandelt und das  $s$ -Quark im  $p$ -Regime.

## 1.4 Verknüpfung von Gitter-QCD und chiraler Störungstheorie

Die Verknüpfung der beiden Theorien läuft häufig auf das Berechnen der Niederenergiekonstanten der chiralen Störungstheorie, also zum Beispiel  $F_0$ , oder  $B_0$ , durch Gittersimulationen, hinaus. Wie dies genau geschieht, sei hier am Beispiel des skalaren Singulett-Quarkkondensates erläutert.

Das Pfadintegral der QCD im Kontinuum ist definiert als

$$Z_{QCD} = \int D[A_\mu] D[\bar{\Psi}, \Psi] \exp \left\{ - \int d^4x \mathcal{L}_{QCD} \right\}, \quad (1.127)$$

wobei  $\mathcal{L}_{QCD}$  die aus den vorangegangenen Kapiteln bekannte Lagrangedichte der QCD ist. Das Quarkkondensat kann durch eine Ableitung des Pfadintegral nach den Quarkmassen bestimmt werden:

$$\sum_{f=u,d,s} \frac{\partial \ln Z_{QCD}}{\partial m_f} \Big|_{m_f=0} = - \langle \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s \rangle \Big|_{m_f=0} \equiv \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle. \quad (1.128)$$

Das Gleiche lässt sich natürlich auf der Seite der chiralen Störungstheorie berechnen. Das Pfadintegral der chiralen Störungstheorie niedrigster Ordnung ist

$$Z_2 = \int D[U] \exp \left\{ - \int d^4x \mathcal{L}_2 \right\}, \quad (1.129)$$

mit der Lagrangedichte aus Gleichung 1.118. Auch hier kann nach den Quarkmassen abgeleitet werden und man erhält

$$\sum_{f=u,d,s} \frac{\partial \ln Z_2}{\partial m_f} \Big|_{m_f=0} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \sum_{f=u,d,s} \frac{\partial}{\partial m_f} \langle \text{Tr}[M(U + U^\dagger)] \rangle \Big|_{m_f=0} = 3F_0^2 B_0 + \dots \quad (1.130)$$

Werden die Gleichungen 1.128 und 1.130 direkt miteinander verglichen, erhält man

$$\sum_{f=u,d,s} \frac{\partial \ln Z_{QCD}}{\partial m_f} \Big|_{m_f=0} \equiv \sum_{f=u,d,s} \frac{\partial \ln Z_2}{\partial m_f} \Big|_{m_f=0}, \quad (1.131)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \langle \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s \rangle \equiv \Sigma = F_0^2 B_0. \quad (1.132)$$

Die Gleichung 1.132 ist auch bekannt als Gell-Mann-Oakes-Relation und eine Möglichkeit aus Gittersimulationen das Quarkkondensat zu berechnen.

Das bedeutet, dass die linke Seite von Gleichung 1.131 nun auf dem Gitter definiert wird und dann durch Simulationen berechnet wird, während die rechte Seite in einem Regime der chiralen Störungstheorie definiert wird.

Wird das Epsilon-Regime gewählt, so erhält man mit der Abkürzung  $\mu = m\Sigma V$  für das Quarkkondensat in Sektoren mit fester topologischer Ladung  $\nu$  (siehe Kapitel 3):

$$\Sigma_\nu(\mu) \equiv \frac{\Sigma}{N_f} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\epsilon = \frac{\Sigma \nu}{\mu} + \tilde{\chi}_\nu, \quad (1.133)$$

$$\text{mit} \quad \tilde{\chi}_\nu = \frac{\Sigma}{2(N_f + \nu)} \mu + \dots \quad (1.134)$$

für den Fall, dass  $\mu \ll 1$ . Es ist noch anzumerken, dass  $\Sigma_\nu(\mu)$  Infrarotdivergenzen enthält, die proportional zu  $\frac{1}{\mu}$  sind. Dies wird für die Verknüpfung der beiden Theorien wichtig werden, welche in Kapitel 2 vorgestellt wird.

$\tilde{\chi}_\nu$  ist bis zur nachführenden Ordnung bekannt [5] und damit ist das chirale Quarkkondensat im Epsilon-Regime

$$\Sigma_{eff}(V) = \Sigma \left[ 1 + \frac{N_f^2 - 1}{N_f} \frac{\beta_1}{F^2 L^2} \right], \quad (1.135)$$

wobei  $\beta_1$  eine volumenabhängige Größe ist und  $L = V^{\frac{1}{4}}$  ist.

Auf der QCD-Seite kann das Quarkkondensat in einem Sektor mit fester Topologie (siehe Kapitel 2 und 3) geschrieben werden als

$$-\frac{\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle_\nu}{N_f} = 2m \int_0^\infty d\lambda \frac{\rho_\nu(\lambda)}{m^2 + \lambda^2} = \frac{\nu}{Vm} + \chi_\nu, \quad (1.136)$$

wobei  $\rho_\nu(\lambda)$  die spektrale Dichte des Diracoperators [21] ist und auch hier eine Divergenz in  $1/m$  auftritt. Beseitigt man die Divergenzen durch Renormierung, so können  $\tilde{\chi}_\nu$  und  $\chi_\nu$  direkt miteinander verglichen und so das Quarkkondensat berechnet werden.

Weitere Methoden  $F_0$  und  $B_0$  durch eine Verknüpfung von Gitter-QCD und chiraler Störungstheorie zu bestimmen, sind in [23] ausführlich beschrieben und erläutert.

## Kapitel 2

# Problemstellung

Im ersten Kapitel ist allgemein auf die Gitter-QCD und die chirale Störungstheorie, sowie die Verknüpfung der beiden Theorien eingegangen worden. Dies wird im Folgenden für die Beschreibung der  $\Delta I = 1/2$ -Regel benötigt werden. Dazu wird zuerst auf den Hamiltonoperator in der QCD und der chiralen Störungstheorie eingegangen, der für  $\Delta S = 1$ -Übergänge verantwortlich ist. Danach wird die Verknüpfung zwischen Gitter-QCD und die chiralen Störungstheorie für dieses Problem beschrieben.

### 2.1 Der Hamiltonoperator des $\Delta S = 1$ -Übergangs

Der Zerfall eines Kaons in zwei Pionen wird durch eine V-A Strom-Strom-Wechselwirkung, also einem W-Boson, übertragen. Sie kann wie folgt definiert werden

$$S_w = \frac{1}{2} g_W^2 \sum_{q=u,c,t} (V_{qs})^* V_{qd} \int d^4x d^4y (\bar{s} \gamma_\mu P_- q)(x) D_{\mu\nu}(x-y) (\bar{q} \gamma_\nu P_- d)(y). \quad (2.1)$$

$D_{\mu\nu}$  ist der Propagator des W-Bosons,  $(V_{qs})^*$  und  $V_{qd}$  sind Elemente der CKM-Matrix,  $P_- = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$  und  $g_w = 4\sqrt{2}G_F M_W^2$  die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung. Die möglichen Beiträge durch das Topquark sind um drei Größenordnungen gegenüber denen des Upquarks unterdrückt und können aus diesem Grund vernachlässigt werden. Es wird nur noch über das Upquark und das Charmquark summiert.

Da die größten Beiträge zu  $S_w$  von dem Bereich  $x \approx y$  stammen, kann eine Operator-Produkt-Entwicklung in der inversen W-Boson-Masse gemacht werden. Die Wirkung geht dann über zu

$$S_w \approx \int d^4x \mathcal{H}_w(x), \quad \mathcal{H}_w(x) = \frac{g_w^2}{4M_W^2} (V_{us})^* V_{ud} \sum_n h_n O_n(x), \quad (2.2)$$

wobei  $h_n$  dimensionslose Wilson-Koeffizienten sind, die vom Renormalisationsschema abhängen. Die Operatoren  $O_n(x)$  können durch eine Symmetriebetrachtung [8] aller globalen Symmetrien bestimmt werden. Da nur zwei Quarkfamilien betrachtet werden, sollte der Hamiltonoperator CP-erhaltend sein. Man erhält explizit für ein aktives Charmquark [17]

$$H_w = 2\sqrt{2}G_F(V_{us})^* V_{ud} \left\{ \sum_{\sigma=\pm 1} h_w^\sigma ([O_w]_{suud}^\sigma - [O_w]_{sccd}^\sigma) + h_m [O_m]_{sd} \right\} + H.c. \quad (2.3)$$

mit den Wilson-Koeffizienten  $h_w^\pm, h_m$ , deren Werte in führender Ordnung  $h_w^\pm = 1, h_m = 0$  sind.  $H.c.$  steht für den komplex konjugierten Anteil des Hamiltonoperators. Die Schreibweise der Operatoren aus Gleichung 2.3 ist eine Abkürzende, die für

$$[O_w]_{rsuv}^\sigma \equiv \frac{1}{2} ([O_w]_{rsuv} + \sigma [O_w]_{rsvu}), \quad (2.4)$$

$$[O_w]_{rsuv} \equiv (\bar{\Psi}_r \gamma_\mu P_- \Psi_u) (\bar{\Psi}_s P_- \Psi_v), \quad (2.5)$$

$$[O_m]_{sd} \equiv (m_c^2 - m_u^2) \{ m_s (\bar{\Psi}_s P_- \Psi_d) + m_d (\bar{\Psi}_s P_+ \Psi_d) \} \quad (2.6)$$

steht, wobei u, s, d, c physikalische und r, s, u, v generische Flavourindizes sind.

Es existieren verschiedene Methoden, um den Zerfall mit diesen Operatoren zu beschreiben. Die einfachste Methode ist, anzunehmen, das Charmquark sei so leicht wie die drei anderen Quarks. Dadurch besitzt die Lagangedichte eine chirale  $SU(4)$ -Symmetrie.

Dieser Fall ist allerdings unphysikalisch, da das Charmquark bei weitem schwerer ist als Up-, Down- und Strange-Quark, weshalb man diese Rechnungen nur als erste Näherungen betrachten darf.

Um das Charmquark als schweres Quark behandeln zu können, kann der Hamiltonoperator vom  $SU(4)$  symmetrischen Fall in irreduzible Darstellungen der  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  Flavour-Gruppe zerlegt werden.

Da der Hamiltonoperator wie ein Singulett unter  $SU(3)_R$  transformiert, kann er auf eine irreduzible Darstellung der  $SU(3)_L$ -Symmetrie mit den Projektionsoperatoren aus Anhang A projiziert werden und man erhält

$$H_w = 2\sqrt{2}G_F(V_{us})^*V_{ud} \left\{ h_w^+[\hat{O}_w]_{suud}^+ + \frac{1}{5}h_w^+[R_w]_{sd}^+ - h_w^-[R_w]_{sd}^- - \frac{1}{2}(h_w^+ + h_w^-)[O_w]_{sccd} - \frac{1}{2}(h_w^+ - h_w^-)[O_w]_{scdc} + h_m[O_m]_{sd} \right\} + H.c. \quad (2.7)$$

mit den Operatoren

$$[\hat{O}_w]_{suud}^+ \equiv \frac{1}{2} \left\{ [O_w]_{suud} + [O_w]_{sudu} - \frac{1}{5} \sum_{k=u,d,s} \left( [O_w]_{skdk} + [O_w]_{skkd} \right) \right\} \quad (2.8)$$

$$[R_w]_{sd}^\pm \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=u,d,s} \left( [O_w]_{skdk} \pm [O_w]_{skkd} \right). \quad (2.9)$$

Der erste Operator des Hamiltonoperators aus Gleichung 2.7 transformiert unter dem 27-Plet der  $SU(3)_L$ -Subgruppe, das heißt, er ist symmetrisch unter Vertauschung von Quark-Antiquark-Indizes und außerdem spurlos. Die übrigen Operatoren gehören der irreduziblen Darstellung der Dimension 8 an und transformieren damit unter  $3^* \otimes 3$ .

Es existieren zwei Möglichkeiten, das schwere Charmquark auf Seiten der Gitter-QCD zu behandeln. Zum einen kann das Charmquark ausintegriert werden [7] oder aber es kann explizit mit simuliert werden [17]. Für die chirale Störungstheorie macht dies keinen Unterschied, da nur der  $SU(3)$ -Fall betrachtet werden muss, wobei es auch hier möglich ist, das Charmquark auszuintegrieren [16].

Der Anteil der starken Wechselwirkung kommt in der chiralen Störungstheorie durch ihre Lagrangedichte zum tragen, die in führender Ordnung im  $SU(3)$ -Fall gegeben ist als

$$\mathcal{L}_{\chi PT} = \frac{F^2}{4} \text{Tr}[\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger] - \frac{m\Sigma}{2} \text{Tr}[e^{\frac{i\theta}{N_f}} U + U^\dagger e^{\frac{-i\theta}{N_f}}]. \quad (2.10)$$

Der zu Gleichung 2.7 korrespondierende Hamiltonoperator der chiralen Störungstheorie für  $\Delta S = 1$ -Übergänge ist

$$\mathcal{H}_W = 2\sqrt{2}G_F V_{ud} V_{us}^* \left\{ \frac{5}{3}g_{27}O_{27} + 2g_8O_8 + 2g'_8O'_8 \right\} + H.c. \quad (2.11)$$

mit den Operatoren

$$O_{27} = [O_w]_{suud}^+ = \frac{3}{5}([O_W]_{sudu} + \frac{2}{3}[O_W]_{suud}), \quad (2.12)$$

$$O_8 = [R_W]_{sd}^+ = \frac{1}{2} \sum_{k=u,d,s} [O_W]_{skkd}, \quad (2.13)$$

$$[O_W]_{rsuv} = \frac{F^4}{4} (\partial_\mu U U^\dagger)_{ur} (\partial_\mu U U^\dagger)_{vs}, \quad (2.14)$$

$$[O'_8] = \frac{F^2}{2} m \Sigma (e^{\frac{i\theta}{N_f}} U + U^\dagger e^{\frac{-i\theta}{N_f}}). \quad (2.15)$$

## 2.2 Korrelationsfunktionen

Den Übergang von einem Kaon zu zwei Pionen wird durch die Vier-Punkt-Korrelationsfunktion

$$\langle \pi\pi | O_R | K \rangle \quad (2.16)$$

beschrieben, wobei  $O_R$  einer der generischen Operatoren des vorangegangenen Kapitels repräsentieren soll. Allerdings ist es nicht möglich, den physikalischen Inhalt der euklidischen Korrelationsfunktion zu rekonstruieren [22]. Deshalb wird auf die Berechnung der Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen

$$\langle \pi | O_R | K \rangle, \quad \langle 0 | O_R | K \rangle \quad (2.17)$$

zurückgegriffen. Die Kombination dieser beiden Korrelationsfunktionen liefert die selben Informationen wie Gleichung 2.16 und kann dazu benutzt werden die Amplituden  $A_0$  und  $A_2$  zu bestimmen [1].

Kaonen und Pionen können für konkrete Berechnungen durch linkshändige Ströme

$$J_\mu^a = \bar{\Psi} T^a \gamma_\mu P_- \Psi \quad (2.18)$$

oder pseudoskalare Dichten

$$P^a = \bar{\Psi} \gamma_5 T^a \Psi \quad (2.19)$$

ausgedrückt werden. Die einzige Eigenschaft der Erzeugenden der Symmetriegruppen, der Ts, die für diese Berechnung benötigt wird, ist ihre Spurlosigkeit. Das heißt, sie können dazu verwendet werden, um die richtigen Flavourindizes für Kaonen und Pionen zu erzeugen (siehe Kapitel 3). Die Korrelationsfunktion

$$\langle J_0^a(x) O_R(0) J_0^b(y) \rangle \quad (2.20)$$

ist schon erfolgreich für  $\Delta I = 1/2$  und  $\Delta I = 3/2$ -Übergänge sowohl im  $SU(4)$  [8] als auch im  $SU(3)$ -Fall [17], [15] berechnet worden. Der Unterschied zur Verwendung von pseudoskalaren Dichten gegenüber der von linkshändigen Strömen besteht in den unterschiedlichen Simulationsmethoden. Somit verfügt man über eine Möglichkeit die Größe des Charm-Quark-Beitrages der  $\Delta I = 1/2$ -Regel auf unterschiedliche Weise zu berechnen und die Ergebnisse gegenseitig zu kontrollieren.

Die zu berechnende Korrelationsfunktion mit zwei pseudoskalaren Dichten in einem Sektor mit fester topologischer Ladung  $\nu$  ist

$$[C_R]_\nu(x_0 - z_0, y_0 - z_0) = \lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \int d^3x \int d^3y \langle \partial_{x_0} P^a(x) O_R(z) \partial_{y_0} P^b(y) \rangle_\nu. \quad (2.21)$$

Die zeitlichen Ableitungen treten auf, um Beiträge der Lagrangedichte höherer Ordnung und damit eine Kontamination mit weiteren Niederenergiekonstanten zu vermeiden [3]. Um eine bessere Statistik der Gitter-QCD-Simulationen zu erhalten, wird noch über alle Gitterpunkte summiert, was auf Seiten der chiralen Störungstheorie einer Integration über den Raum entspricht.

Die Korrelationsfunktion aus Gleichung 2.21 ist auf der QCD-Seite des Problems nur dann ungleich null, wenn einige der auftretenden masse-behaftete Quarkpropagatoren  $S_m$  mit Nullmoden abgesättigt sind [14]. Die Quarkpropagatoren können mit den Nullmoden auf QCD-Seite, welche Element des Kerns des Diracoperators sind,  $v_i(x) \in \mathcal{K}$  durch ihre spektrale Darstellung

$$S_m(x, y) = \sum_{i \in \mathcal{K}} \frac{v_i(x) v_i^\dagger(y)}{mV} + \dots \quad (2.22)$$

ausgedrückt werden. Die Nullmoden sind entsprechend der Vorschrift

$$\int_x v_i^\dagger(x) v_i(x) = V \quad (2.23)$$

normalisiert, wobei  $V$  das Volumen des betrachteten Raumbereichs ist.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass die Dimension des Kerns des Diracoperators  $\mathcal{K}$  der Betrag der topologischen Ladung  $\nu$  ist. Aus diesem Grund werden die Korrelationsfunktionen auch in Sektoren mit fester Ladung betrachtet. An Gleichung 2.22 ist ersichtlich, dass die Korrelationsfunktion auf QCD-Seite Pole in  $1/(mV)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  enthält. Die Residuen dieser Pole sind numerisch weniger aufwändig umzusetzen als die gesamte Korrelationsfunktion, denn es ist nicht mehr nötig die Propagatoren zu simulieren.

Die Residuen der Korrelationsfunktion erhält man mit

$$C_\nu(x_1, x_2, \dots) \equiv \frac{\text{Res}_n}{(mV)^N} + \dots, \quad \text{Res}_n = \lim_{m \rightarrow 0} (mV)^n C_\nu(x_1, x_2, \dots). \quad (2.24)$$

Die auftretenden Pole der Korrelationsfunktionen sowohl in der Gitter-QCD als auch in der chiralen Störungstheorie [3] sind von der Ordnung  $1/(mV)^2$ , weshalb die Residuen zu dieser Ordnung explizit berechnet werden.

Aus praktischen Gründen, die später deutlich werden, werden die auftretenden Drei-Punkts-Korrelationsfunktionen noch auf die Zwei-Punkts-Korrelationsfunktionen

$$-i \text{Tr}[T^a T^b] B_\nu(x_0 - z_0) \equiv \lim_{m \rightarrow 0} \int_{\mathbf{x}} \langle \partial_{x_0} P^a(x) J_0^b(z) \rangle \quad (2.25)$$

normiert. Diese wurden für das Epsilonregime in [14] schon berechnet. Mit der pseudo-skalaren Dichte und dem linkshändigen Strom in chiraler Störungstheorie

$$P^a = \frac{\Sigma}{2} \text{Tr}[T^a (e^{i\theta/N_f} U - U^\dagger e^{-i\theta/N_f})], \quad (2.26)$$

$$J_\mu^a = \frac{F^2}{2} \text{Tr}[T^a (U \partial_\mu U^\dagger)] \quad (2.27)$$

erhält man für die Zwei-Punkt-Funktion

$$TB_\nu(x_0 - z_0) = |\nu| \left\{ 1 + \frac{2\rho}{(FL)^2} \left( |\nu| - \frac{1}{N_f} \right) h_1(\tau_x) \right\}. \quad (2.28)$$

Die Funktion  $h_1(\tau_x)$  ist in Anhang C erläutert,  $\rho \equiv T/L$  und  $\tau_x \equiv (x_0 - z_0)/T$ . Für den generischen Vier-Fermion-Operator aus Gleichung 2.4 ist diese Korrelationsfunktion im  $SU(4)$ -Fall [14] berechnet worden. Für die Projektion der Operatoren auf die irreduzible Darstellung der  $SU(3)_L$ -Symmetrie werden die Korrelationsfunktionen in dieser Diplomarbeit berechnet.

## Kapitel 3

# Führende Ordnung

Um die Korrelationsfunktionen der einzelnen Operatoren mit den pseudoskalaren Dichten berechnen zu können, müssen zunächst alle auftretenden Objekte entsprechend des Zählschemas im Epsilonregime entwickelt werden. Die Operatoren  $O_{27}$  und  $O_8$  werden durch die Projektionsoperatoren, welche in Anhang A aufgeführt sind, aus demselben Operator  $O_{rsuv}$  projiziert, was nahe legt, zu Beginn so allgemein wie möglich zu arbeiten. Wenn alle Kontraktionen ausgeführt sind, wird die Korrelationsfunktion auf die irreduzible Darstellung der  $SU(3)_L$  projiziert. Danach werden die generischen Flavourindizes durch physikalische ersetzt und sowohl die Mittelung über den Raum als auch die zeitlichen Ableitungen berechnet.

### 3.1 Vorarbeit

Wie im Kapitel 1.3 erläutert, kann das Feld  $U(x)$  in einen  $x$ -unabhängigen Teil, die Nullmoden  $U_0$ , und einen  $x$ -abhängigen und spurlosen Teil  $\xi(x)$  entsprechend

$$U(x) = e^{i2\xi(x)/F} U_0 \quad (3.1)$$

aufgespalten werden. Da die Felder  $\xi(x)$  im Epsilonregime von der Ordnung  $O(\epsilon)$  sind, liegt es nahe  $U(x)$  zu entwickeln

$$U(x) = \left\{ 1 + \frac{2i}{F}\xi(x) - \frac{2}{F^2}\xi(x)^2 - \frac{4i}{3F^3}\xi(x)^3 + O(\epsilon^4) \right\} U_0, \quad (3.2)$$

$$U(x)^\dagger = U_0^\dagger \left\{ 1 - \frac{2i}{F}\xi(x) - \frac{2}{F^2}\xi(x)^2 + \frac{4i}{3F^3}\xi(x)^3 + O(\epsilon^4) \right\}. \quad (3.3)$$

Häufig treten auch Ableitungen, welche auf die Felder wirken, auf, die in der Entwicklung

$$\begin{aligned} \partial_\mu U(x) = & \left\{ \frac{2i}{F}\partial_\mu \xi(x) - \frac{2}{F^2}(\partial_\mu \xi(x)\xi(x) + \xi(x)\partial_\mu \xi(x)) - \frac{4i}{3F^3}(\partial_\mu \xi(x)\xi(x)^2 \right. \\ & \left. + \xi(x)\partial_\mu \xi(x)\xi(x) + \xi(x)^2\partial_\mu \xi(x)) + O(\epsilon^5) \right\} U_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

ergeben. Für den generischen Operator  $O_{rsuv}$  wird noch das Produkt aus den Gleichungen 3.2 und 3.4 benötigt

$$\begin{aligned} \partial_\mu U U^\dagger = & \frac{2i}{F}\partial_\mu \xi(x) - \frac{2}{F^2}(\underline{\partial_\mu \xi(x)\xi(x)} + \xi(x)\partial_\mu \xi(x)) \\ & - \frac{4i}{3F^3}\{\partial_\mu \xi(x)\xi(x)^2 + \underline{\xi(x)\partial_\mu \xi(x)\xi(x)} + \xi(x)^2\partial_\mu \xi(x)\} \\ & + \frac{4}{F^2}\underline{\partial_\mu \xi(x)\xi(x)} + \frac{4i}{F^3}\{\underline{\partial_\mu \xi(x)\xi(x)^2} + \underline{\xi(x)\partial_\mu \xi(x)\xi(x)}\} \\ & - \frac{4i}{F^3}\partial_\mu \xi(x)\xi(x)^2 \\ = & \frac{2i}{F}\partial_\mu \xi(x) + \frac{2}{F^2}(\partial_\mu \xi(x)\xi(x) - \xi(x)\partial_\mu \xi(x)) \\ & - \frac{4i}{3F^3}\{\partial_\mu \xi(x)\xi(x)^2 + \xi(x)^2\partial_\mu \xi(x) - 2\xi(x)\partial_\mu \xi(x)\xi(x)\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

In die Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie

$$\mathcal{L}_{2,\mathcal{X}PT} = \frac{F^2}{4} \text{Tr}[\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger] - \frac{m\Sigma}{2} \text{Tr}[e^{\frac{i\theta}{N_f}} U + U^\dagger e^{\frac{-i\theta}{N_f}}] \quad (3.6)$$

können die Entwicklungen der Felder eingesetzt werden, was zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \text{Tr} \left\{ \partial_\mu \xi(x)\partial_\mu \xi(x) \right\} + \frac{2}{3F^2} \text{Tr} \left\{ (\partial_\mu \xi(x)\xi(x))^2 - (\partial_\mu \xi(x))^2 \xi(x)^2 \right\} \\ & + \frac{\Sigma m}{2} \text{Tr} \left\{ (U_0 U_\theta + H.c.) - \frac{2}{F^2} \xi(x)^2 (U_0 U_\theta + h.c.) \right\} + O(\epsilon^8), \end{aligned} \quad (3.7)$$

führt, wobei für  $e^{\frac{-i\theta}{N_f}}$  jetzt  $U_\theta$  abkürzend steht.

Wird Gleichung 3.7 in die Gewichtsfunktion der Korrelationsfunktion eingesetzt, kann diese auch entwickelt werden

$$\begin{aligned} \exp \left\{ - \int d^4x \mathcal{L}_2 \right\} &= \\ &= \exp \left\{ - \int d^4x \text{Tr} \{ \partial_\mu \xi(x) \partial_\mu \xi(x) \} \right\} \exp \{ m \Sigma V \text{Re Tr} [U_0 U_\theta] \} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{2}{3F^2} \int d^4x \text{Tr} \left\{ (\partial_\mu \xi(x) \xi(x))^2 - (\partial_\mu \xi(x))^2 \xi(x)^2 \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m \Sigma}{F^2} \int d^4x \text{Tr} \{ \xi(x)^2 (U_0 U_\theta + H.c.) \} + O(\epsilon^3) \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Auch das Integrationsmaß  $[dU]$  selbst muss entwickelt werden. Die Methode für die Entwicklung ist in [11] ausführlich beschrieben und man erhält bis  $O(\epsilon^2)$

$$[dU] = d\mu(U_0) [d\xi] \left( 1 - \frac{N_f}{6VF^2} \int d^4x \text{Tr} [\xi(x)^2] \right). \quad (3.9)$$

Das bedeutet, dass sich das erzeugende Funktional  $Z_0$  in ein Produkt  $Z_\xi \times Z_\theta$  aufspaltet, wobei die Faktoren in der Entwicklung gegeben sind als

$$Z_\xi = \int [d\xi] \exp \left\{ - \int d^4x \text{Tr} [\partial_\mu \xi \partial_\mu \xi] \right\}, \quad (3.10)$$

$$Z_\theta(m\Sigma V) = \int_{SU(N_f)} d\mu(U_0) \exp \{ m \Sigma V \text{Re Tr} [U_\theta U_0] \}. \quad (3.11)$$

Damit vereinfacht sich das erzeugende Funktional für die Nullmoden zu einem Gruppenintegral über die Gruppe  $SU(N_f)$  mit dem Haar-Maß  $d\mu(U_0)$ .

Die Topologie der Eichfelder spielt im Epsilonregime eine wichtige Rolle und man kann durch eine Fouriertransformation vom Vakuumwinkel  $\theta$  zu Sektoren mit fester topologischer Ladung  $\nu$  gehen [21]. Die Transformation ist definiert als

$$Z_\nu(\mu\Sigma V) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\nu\theta} Z_\theta(m\Sigma V), \quad (3.12)$$

und damit

$$Z_\theta = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\theta} Z_\nu. \quad (3.13)$$

Da in allen Ausdrücken nur das Produkt aus  $U_\theta$  und  $U_0$  vorkommt, ist es sinnvoll sie zu kombinieren. Daraus folgt

$$e^{i\nu\theta} = U_\theta^{N_f\nu} \cdot 1 = U_\theta^{N_f\nu} (\det U_0)^\nu = (\det U_\theta U_0)^\nu = (\det U')^\nu. \quad (3.14)$$

Das Produkt aus  $U_\theta$  und  $U_0$  ist an dieser Stelle mit  $U'$  abgekürzt. Wirkt die Fouriertransformation auf das erzeugende Funktional, so ergibt sich für Sektoren mit festem topologischen Index:

$$\begin{aligned} Z_\nu(\mu\Sigma V) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{SU(N_f)} d\mu(U_0) e^{i\nu\theta} \exp\{m\Sigma V \operatorname{Re} \operatorname{Tr}[U_\theta U_0]\} \\ &= \int_{U' \in U(N_f)} d\mu(U') (\det U')^\nu e^{i\nu\theta} \exp\{m\Sigma V \operatorname{Re} \operatorname{Tr}[U']\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ab jetzt wird für das Produkt  $U'$  nur noch abkürzend  $U$  verwendet.

Auch die pseudoskalaren Dichten müssen entsprechend dem Zählschema entwickelt werden.

$$\begin{aligned} P^a &= \Sigma \operatorname{Tr} \left\{ T^a \left[ \frac{1}{2}(U - h.c.) + \frac{i}{F}(\xi U + h.c.) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{F^2}(\xi^2 U - h.c.) - \frac{2i}{3F^3}(\xi^3 U - h.c.) + O(\epsilon^4) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Jetzt fehlen nur noch der generische Operator  $O_{rsuv}$  und der Operator  $O'_8$ . Bei beiden Operatoren sind die führenden Terme von der Ordnung  $\epsilon^4$  und es wird bis zur Ordnung  $\epsilon^6$  entwickelt. Für  $O'_8$  erhält man

$$O'_8 = m\Sigma \left\{ \frac{F^2}{2} (U + h.c.)_{ds} + iF(\xi U - h.c.)_{ds} - (\xi^2 U + h.c.)_{ds} \right\}, \quad (3.17)$$

wobei hier schon explizit physikalische Indizes eingesetzt wurden, da dieser Operator nicht mehr projeziert werden muss. Für  $O_{rsuv}$  erhält man:

$$\begin{aligned} O_{rsuv} &= [\partial_\mu U U^\dagger]_{ur} [\partial_\mu U U^\dagger]_{vs} = \\ &= \left\{ \frac{2i}{F} [\partial_\mu \xi(x)]_{ur} + \frac{2}{F^2} \{ [\partial_\mu \xi(x) \xi(x)]_{ur} - [\xi(x) \partial_\mu \xi(x)]_{ur} \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4i}{3F^3} \{ [\partial_\mu \xi(x) \xi(x)^2]_{ur} + [\xi(x)^2 \partial_\mu \xi(x)]_{ur} - 2[\xi(x) \partial_\mu \xi(x) \xi(x)]_{ur} \} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \frac{2i}{F} [\partial_\mu \xi(x)]_{vs} + \frac{2}{F^2} \{ [\partial_\mu \xi(x) \xi(x)]_{vs} - [\xi(x) \partial_\mu \xi(x)]_{vs} \} \right. \\
 & \left. - \frac{4i}{3F^3} \{ [\partial_\mu \xi(x) \xi(x)^2]_{vs} + [\xi(x)^2 \partial_\mu \xi(x)]_{vs} - 2[\xi(x) \partial_\mu \xi(x) \xi(x)]_{vs} \} \right\} \\
 = & - \frac{4}{F^2} [\partial_\mu \xi(x)]_{ur} [\partial_\mu \xi(x)]_{vs} \\
 & + \frac{4i}{F^3} \{ [\partial_\mu \xi(x)]_{ur} \{ [\partial_\mu \xi(x) \xi(x)]_{vs} - [\xi(x) \partial_\mu \xi(x)]_{vs} \} \\
 & \quad + \{ [\partial_\mu \xi(x) \xi(x)]_{ur} - [\xi(x) \partial_\mu \xi(x)]_{ur} \} [\partial_\mu \xi(x)]_{vs} \} \\
 & + \frac{8}{3F^4} \{ [\partial_\mu \xi(x)]_{ur} \{ [\partial_\mu \xi(x) \xi(x)^2]_{vs} + [\xi(x)^2 \partial_\mu \xi(x)]_{vs} - 2[\xi(x) \partial_\mu \xi(x) \xi(x)]_{vs} \} \\
 & \quad + \{ [\partial_\mu \xi(x) \xi(x)^2]_{ur} + [\xi(x)^2 \partial_\mu \xi(x)]_{ur} - 2[\xi(x) \partial_\mu \xi(x) \xi(x)]_{ur} \} [\partial_\mu \xi(x)]_{vs} \} \\
 & + \frac{4}{F^4} \{ [\partial_\mu \xi(x) \xi(x)]_{ur} - [\xi(x) \partial_\mu \xi(x)]_{ur} \} \{ [\partial_\mu \xi(x) \xi(x)]_{vs} - [\xi(x) \partial_\mu \xi(x)]_{vs} \}. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

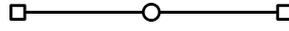
Zusammenfassend sind noch einmal alle Entwicklungen der vorkommenden Terme nach ihrer möglichen Ordnung und damit der Anzahl der Felder in Tabelle 3.1 geordnet.

Operator	Ordnung	Anzahl der Felder
$O_{rsuv}$	$O(\epsilon^4)$	2
	$O(\epsilon^5)$	3
	$O(\epsilon^6)$	4
$O'_8$	$O(\epsilon^4)$	0
	$O(\epsilon^5)$	1
	$O(\epsilon^6)$	2
Dichte	$O(1)$	0
	$O(\epsilon)$	1
	$O(\epsilon^2)$	2
Wirkung	$O(1)$	0
	$O(\epsilon^2)$	2
Maß	$O(1)$	0
	$O(\epsilon^2)$	2

**Tabelle 3.1:** Ordnung der einzelnen Terme und ihre Anzahl der Felder

### 3.2 $O_{rsuv}$ vor der Projektion

Da nach der Kontraktion zeitliche Ableitungen auf die Korrelationsfunktionen wirken, können nur Graphen auftreten, in denen die pseudoskalaren Dichten verbunden sind. Der Operator  $O_{27}$  kann außerdem in führender Ordnung keine Flavour-Singulett-Schleife bilden, da dann Deltas entstehen, die beim Übergang zu den physikalischen Indizes verschwinden. Das heißt, die führenden Beiträge sind im Epsilonzählschema von der Ordnung  $\epsilon^6$  und setzen sich aus  $O_{rsuv}$  der Ordnung  $\epsilon^4$  und zwei pseudoskalaren Dichten der Ordnung  $\epsilon^1$  zusammen. Der zugehörige Graph ist in 3.1.



**Abbildung 3.1:** Graph zur führenden Ordnung von  $O_{rsuv}$ . Ein ungefüllter Kreis repräsentiert den Operator  $O_{rsuv}$  und ein ungefülltes Quadrat eine pseudoskalare Dichte.

Werden alle Entwicklungen entsprechend der Ordnung im Epsilon-Regime in die Korrelationsfunktion eingesetzt, ergibt in führender Ordnung:

$$\begin{aligned} \langle P(x)O_{rsuv}(z)P(y) \rangle &= \Sigma^2 \langle \text{Tr} [T^a (\xi(x)U + U^\dagger \xi(x))] \\ &\quad \times \partial_\mu \xi(z)_{ur} \partial_\mu \xi(z)_{ur} \\ &\quad \times \text{Tr} [T^b (\xi(y)U + U^\dagger \xi(y))] \rangle \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die Gruppenintegrale, in denen sowohl ein  $U$  als auch ein  $U^\dagger$  vorkommen, treten, wie im Anhang B beschrieben, nicht auf und können daher schon an dieser Stelle beim Ausmultiplizieren der Spuren vernachlässigt werden. Wird alles mit Indizes ausgeschrieben, ergibt sich:

$$\begin{aligned} &= \Sigma^2 T_{ij}^a T_{mn}^b \langle U_{ki} U_{om} \xi(x)_{jk} \xi(y)_{no} \partial_\mu \xi(z)_{ur} \partial_\mu \xi(z)_{ur} + \\ &\quad + U_{jk}^\dagger U_{no}^\dagger \xi(x)_{ki} \xi(y)_{om} \partial_\mu \xi(z)_{ur} \partial_\mu \xi(z)_{ur} \rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Felder können nach der Vorschrift [15]

$$\langle \xi(x)_{ij} \xi(z)_{kl} \rangle = \frac{1}{2} (G(x-z)_{il} \delta_{jk} - E(x-z)_{ij} \delta_{kl}) \quad (3.21)$$

kontrahiert werden. In dem hier betrachteten Fall gilt  $E(x - z) = \frac{1}{N_f} G(x - z)$ .  
Jeweils ein Feld aus der pseudoskalaren Dichte wird mit einem Feld aus dem Operator kontrahiert, was für jeden Summanden aus Gl. 3.20 zwei Kombinationen ergibt

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Sigma^2}{4} T_{ij}^a T_{mn}^b \partial_\mu G(x - z) \partial_\mu G(y - z) \times \\
 &\left\langle U_{ki} U_{om} \left[ (\delta_{jr} \delta_{ku} - \frac{1}{N_f} \delta_{jk} \delta_{ru}) (\delta_{ns} \delta_{ov} - \frac{1}{N_f} \delta_{no} \delta_{vs}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\delta_{js} \delta_{kv} - \frac{1}{N_f} \delta_{jk} \delta_{vs}) (\delta_{nr} \delta_{ou} - \frac{1}{N_f} \delta_{no} \delta_{ur}) + \right] \right. \\
 &\quad \left. + U_{jk}^\dagger U_{no}^\dagger \left[ (\delta_{kr} \delta_{iu} - \frac{1}{N_f} \delta_{ki} \delta_{ur}) (\delta_{os} \delta_{mv} - \frac{1}{N_f} \delta_{om} \delta_{vs}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\delta_{ks} \delta_{iv} - \frac{1}{N_f} \delta_{ki} \delta_{vs}) (\delta_{or} \delta_{mu} - \frac{1}{N_f} \delta_{om} \delta_{ur}) \right] \right\rangle. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Bevor die Deltas auf die U und die T angewendet werden, sollten die Gruppenintegrale berechnet werden, da sie im Wesentlichen auch nur auf Deltas führen. Dadurch entsteht eine kompakte Tensorstruktur, welche leicht zu projizieren ist. Wie die vorkommenden Gruppenintegrale berechnet werden, ist in Anhang B ausführlich dargestellt. Außerdem kann ausgenutzt werden, dass eine Projektion von  $\delta_{ur} \delta_{vs}$  immer null ergibt und deshalb diese Terme schon hier vernachlässigt werden können. Mit der abkürzenden Schreibweise

$$T_{ij}^{\{a} T_{kl}^{b\}} = T_{ij}^a T_{kl}^b + T_{kl}^a T_{ij}^b \quad (3.23)$$

können alle Deltas ausgeführt werden und es entsteht eine kompakte Form des Korrelators

$$\begin{aligned}
 &\lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \langle P(x) O_{rsuv}(z) P(y) \rangle = \quad (3.24) \\
 &= \partial_\mu G(x - z) \partial_\mu G(y - z) \left( \nu^2 T_{ur}^{\{a} T_{vs}^{b\}} - |\nu| T_{us}^{\{a} T_{vr}^{b\}} + \frac{|\nu|}{N_f} \left[ T_{vi}^{\{a} T_{is}^{b\}} \delta_{ur} + T_{ui}^{\{a} T_{ir}^{b\}} \delta_{vs} \right] \right),
 \end{aligned}$$

welche leicht projiziert werden kann.

### 3.3 Der Operator $O_{27}$ in führender Ordnung

Die Projektionsoperatoren sind in Anhang A angegeben und ihre Wirkung wird dort genauer erläutert. Da allerdings der Übergang zu physikalischen Indizes gemacht werden soll, treten bei  $P_2^\pm$  und  $P_3$  weniger Terme auf. Das heißt,  $P_2^\pm$  ist gegeben als

$$(P_2^\sigma)_{\tilde{r}\tilde{s}\tilde{u}\tilde{v};rsuv} = \delta_{\tilde{r}r}\delta_{\tilde{s}s}\delta_{\tilde{u}u}\delta_{\tilde{v}v} - \frac{\sigma}{N_f + 2\sigma} \delta_{\tilde{s}\tilde{u}}\delta_{\tilde{r}r}\delta_{\tilde{v}u}\delta_{sv}. \quad (3.25)$$

Wie in Anhang A erläutert, wird  $O_{27}$  mit der Projektion

$$[O_{27}]_{\tilde{r}\tilde{s}\tilde{u}\tilde{v}} \equiv (P_2^+ P_1^+)_{\tilde{r}\tilde{s}\tilde{u}\tilde{v};rsuv} O_{rsuv} \quad (3.26)$$

aus  $O_{rsuv}$  gewonnen. Führt man diese aus, so erhält man für den Korrelator

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \langle P(x) O_{27}(z) P(y) \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\nu^2 - |\nu|) \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) \\ & \times \left( T_{vs}^{\{a} T_{ur}^{\}b} + T_{vr}^{\{a} T_{us}^{\}b} - \frac{\delta_{us}}{N_f + 2} \left\{ T^a, T^b \right\}_{vr} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Alle Indizes sind bis jetzt noch generisch und müssen entsprechend Gleichung D.3 in physikalische Indizes geändert werden. Außerdem kann noch eine spezielle Wahl für die T getroffen werden. Mit dieser Rechnung sollen Kaonzerfälle beschrieben werden, was nahe legt, die T so zu wählen, dass sie Kaonen und Pionen beschreiben. Konkret bedeutet das

$$T_{ij}^a \equiv \delta_{iu}\delta_{js} \Leftrightarrow P^a = \bar{u}\gamma_5 s, \quad (3.28)$$

$$T_{ij}^b \equiv \delta_{id}\delta_{ju} \Leftrightarrow P^b = \bar{d}\gamma_5 u. \quad (3.29)$$

Werden die Gleichungen 3.28 und 3.29 in Gleichung 3.27 eingesetzt und wird  $N_f = 3$  gewählt, so erhält man für den Tensoranteil  $\frac{4}{5}$  und insgesamt für die Korrelationsfunktion

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \langle P(x) O_{27}(z) P(y) \rangle = \frac{2}{5} (\nu^2 - |\nu|) \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z). \quad (3.30)$$

Damit die Ergebnisse mit denen aus der Gitter-QCD zusammengefügt werden können, fehlen natürlich noch die räumliche Mittelungen und die Zeitableitungen

$$\begin{aligned} \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} \lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \langle P(x) O_{27}(z) P(y) \rangle &= \\ = \frac{2}{5} \Sigma^2 (\nu^2 - |\nu|) \partial_{x_0} \int_{\mathbf{x}} \partial_{\mu} G(x - z) \partial_{y_0} \int_{\mathbf{y}} \partial_{\mu} G(y - z). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die auftretenden Integrale sind schon in [14] berechnet worden und werden in Anhang C aufgeführt. Das hier auftretende ist gegeben als

$$\partial_{x_0} \int_{\mathbf{x}} \partial_{\mu} G(x - z) = \frac{\delta_{\mu 0}}{T} \quad (3.32)$$

und es ergibt sich

$$[C_{27}]_{\nu} = \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} \lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \langle P(x) O_{27}(z) P(y) \rangle = \frac{2}{5} \frac{(\nu^2 - |\nu|)}{T^2}. \quad (3.33)$$

Als letzter Schritt muss mit der führenden Ordnung zweier Zwei-Punkt-Funktion aus Gleichung 2.28 normiert werden und man erhält

$$\frac{[C_{27}]_{\nu}(x_0 - z_0, y_0 - z_0)}{B_{\nu}(x_0 - z_0) B_{\nu}(y_0 - z_0)} = \frac{2}{5} \left( 1 - \frac{1}{|\nu|} \right). \quad (3.34)$$

### 3.4 Der Operator $O_8$ in führender Ordnung

Die Rechnung für  $O_8$  ist analog zu der für  $O_{27}$  bis auf die Projektion. Auf Gleichung 3.33 angewendet, erhält man

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \langle P(x) O_8(z) P(y) \rangle = \frac{1}{2} (\nu^2 + \frac{2}{3} |\nu|) \partial_{\mu} G(x - z) \partial_{\mu} G(y - z) \left\{ T^a, T^b \right\}_{ur}. \quad (3.35)$$

Werden sowohl die physikalische Indizes entsprechend Gl. D.7 als auch die T entsprechend Gl. 3.28 und 3.29 gewählt und führt man die räumliche Mittelung und die Zeitableitungen aus, erhält man das Endresultat

$$[C_8]_{\nu} = \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} \lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \langle P(x) O_8(z) P(y) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\nu^2 + \frac{2}{3} |\nu|}{T^2}. \quad (3.36)$$

Mit der Normierung folgt daraus:

$$\frac{[C_8]_\nu(x_0 - z_0, y_0 - z_0)}{B_\nu(x_0 - z_0)B_\nu(y_0 - z_0)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{3|\nu|} \right). \quad (3.37)$$

### 3.5 Der Operator $O'_8$ in führender Ordnung

Der einzig mögliche Beitrag von  $O'_8$  zur Ordnung  $\epsilon^6$  ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Werden alle Kontraktionen ausgeführt, so ist die Korrelationsfunktion proportional zum Propagator  $G(x - y)$ .



Abbildung 3.2: Graph zur führenden Ordnung von  $O'_8$

Dieser muss sowohl über  $x$  als auch über  $y$  gemittelt werden. Mit der Darstellung C.1 des Propagators erhält man:

$$\partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} G(x - y) = \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \frac{1}{V} \sum_{p \neq 0} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2}. \quad (3.38)$$

Die Raumintegrationen können ausgeführt werden und es entstehen Deltadistributionen

$$\partial_{x_0} \partial_{y_0} \frac{1}{V} \sum_{p \neq 0} \frac{e^{ip_0(x_0 - y_0)}}{p^2} \int_{\mathbf{x}} e^{i\vec{p}\vec{y}} \int_{\mathbf{x}} e^{-i\vec{p}\vec{y}} = \partial_{x_0} \partial_{y_0} \frac{1}{V} \sum_{p \neq 0} \frac{e^{ip_0(x_0 - y_0)}}{p^2} \delta^{(3)}(p) \delta^{(3)}(p). \quad (3.39)$$

Werden die Deltas und die zeitlichen Ableitungen angewendet, kann explizit über den Impuls null summiert werden und man erhält

$$\frac{1}{V} \sum_{p_0} \left( e^{ip_0(x_0 - y_0)} - 1 \right) \delta^{(3)}(p) = \frac{1}{V} (T\delta(x_0 - y_0) - 1) \delta^{(3)}(p). \quad (3.40)$$

Das Ergebnis entspricht einem Kontaktterm, welcher allerdings vernachlässigt werden kann, da die Dichten nicht am selben Ort sind. Das bedeutet, es gibt keine Beiträge von  $O'_8$  in führender Ordnung.

## Kapitel 4

# Nachführende Ordnung

Die Berechnung der Korrelationsfunktionen der nachführenden Ordnung verlaufen wie die der führenden Ordnung. Zunächst wird die Drei-Punkts-Funktion des generische Operators  $O_{rsuv}$  allgemein berechnet und dann auf  $O_{27}$  und  $O_8$  projiziert. In nachführender Ordnung tragen auch Funktionen des Operators  $O'_8$  bei. Zum Abschluss wird noch eine Methode vorgestellt, wie es im Prinzip möglich sein könnte, die Niederenergiekonstante  $g'_8$  durch Berechnung der Zwei-Punkt-Funktionen einer pseudoskalaren Dichte mit dem Operator  $O'_8$  direkt zu bestimmen.

### 4.1 $O_{rsuv}$ vor der Projektion

Die Entwicklungen aller Terme, die in nachführender Ordnung beitragen können, sind in Kapitel 3.1 ausführlich behandelt worden. In Tabelle 4.2 sind alle möglichen Beiträge zur nachführenden Ordnung des Operators  $O_{rsuv}$  kompakt zusammengefasst. Die beitragenden Graphen mit zugehörigen Korrelationsfunktionen sind vor der Projektion, der räumlichen Integration und den zeitlichen Ableitungen in den Gleichungen 4.1 bis 4.11 dargestellt. Die Gruppenintegrale (und damit die Berechnung der Residuen) sind entsprechend Anhang B schon ausgeführt worden. Es treten hier zusätzliche Beiträge des Massenterms (gefüllter Kreis), des Maßterms (Kreuz) und des kinetischen Terms (Schleife im Propagator) auf.

Dichte	Operator	Dichte	Masse	Kin.	Maß	Gleichung
$O(\epsilon)$	$O(\epsilon^4)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon^2)$	$O(1)$	$O(1)$	4.1, 4.3
$O(\epsilon)$	$O(\epsilon^4)$	$O(\epsilon)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(\epsilon^2)$	4.2
$O(1)$	$O(\epsilon^4)$	$O(\epsilon)$	$O(1)$	$O(\epsilon^2)$	$O(1)$	4.4, 4.5
$O(\epsilon^3)$ :	$O(\epsilon^4)$	$O(\epsilon)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	4.6, 4.7
$O(\epsilon^2)$	$O(\epsilon^4)$	$O(\epsilon^2)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	4.7
$O(\epsilon^2)$	$O(\epsilon^5)$	$O(\epsilon)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	4.9, 4.10
$O(\epsilon)$	$O(\epsilon^6)$	$O(\epsilon)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	4.11

 Tabelle 4.1: Beiträge zu  $O_{rsuv}$  der Ordnung  $\epsilon^8$ 

$$\begin{aligned}
 \left[ \text{Diagram} \right]_{\text{verb.}} &= \frac{G(0)(N_f^2 - 1)}{2F^2 N_f} \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) \times \\
 &\times 4 \left\{ \nu^2 T_{ur}^{\{a} T_{vs}^{\{b\}} - |\nu| T_{vr}^{\{a} T_{us}^{\{b\}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{N_f} \left( \delta_{ur} T_{vi}^{\{a} T_{is}^{\{b\}} + \delta_{vs} T_{ui}^{\{a} T_{ir}^{\{b\}} \right) \right\} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \text{Diagram} \right] &= -\frac{N_f}{6VF^2} \int d^4 s \left( G(y-s) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + x \leftrightarrow y \right) \times \\
 &\times 4 \left\{ \nu^2 T_{ur}^{\{a} T_{vs}^{\{b\}} - |\nu| T_{vr}^{\{a} T_{us}^{\{b\}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{|\nu|}{N_f} \left( \delta_{ur} T_{vi}^{\{a} T_{is}^{\{b\}} + \delta_{vs} T_{ui}^{\{a} T_{ir}^{\{b\}} \right) \right\} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \text{Diagram} \right] &= -\frac{1}{N_f F^2 V} \int d^4 s \left( G(x-y) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + x \leftrightarrow y \right) \\
 &\times \left\{ |\nu| \left[ (N_f + 2N_f \nu^2 - (N_f^2 - 2)|\nu|) T_{ur}^{\{a} T_{vs}^{\{b\}} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (N_f^2 - 2 - 3N_f |\nu|) T_{vr}^{\{a} T_{us}^{\{b\}} \right] + \frac{\nu}{2} (2 + N_f |\nu|) \times \right. \\
 &\quad \times [(\nu + |\nu|) (T_{ui}^a T_{is}^b \delta_{rv} + T_{vi}^a T_{ir}^b \delta_{us}) + \\
 &\quad \left. + (\nu - |\nu|) (T_{ui}^b T_{is}^a \delta_{rv} + T_{vi}^b T_{ir}^a \delta_{us}) \right] - \\
 &\quad - \frac{\nu}{N_f |\nu|} \left[ (\nu(4 + N_f(\nu - 1)) + (2 + 4N_f \nu)|\nu|) \right] \times \\
 &\quad \times (T_{vi}^a T_{is}^b \delta_{ur} + T_{ui}^a T_{ir}^b \delta_{vs}) - \\
 &\quad - (\nu(N_f^2 - 4 + N_f \nu) + (2 - 4N_f \nu)|\nu|) \times \\
 &\quad \left. \times (T_{vi}^b T_{is}^a \delta_{ur} + T_{ui}^b T_{ir}^a \delta_{vs}) \right\} \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= -\frac{N_f}{3F^2} \int d^4s \left\{ \partial_\nu^2 G(0) G(s-y) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + \right. \\
 &\quad \left. + G(0) \partial_\nu G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + x \leftrightarrow y \right\} \times \\
 &\quad \times \left\{ \nu^2 T_{ur}^{\{a} T_{vs}^{\{b\}} - |\nu| T_{vr}^{\{a} T_{us}^{\{b\}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{|\nu|}{N_f} \left( \delta_{ur} T_{vi}^{\{a} T_{is}^{\{b\}} + \delta_{vs} T_{ui}^{\{a} T_{ir}^{\{b\}} \right) \right\} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

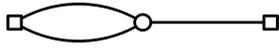
$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 2} &= \frac{1}{3F^2} \left\{ |\nu| T_{ur}^{\{a} T_{vs}^{\{b\}} - \nu^2 T_{vr}^{\{a} T_{us}^{\{b\}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{|\nu|}{2} \left( \delta_{rv} T_{ui}^{\{a} T_{is}^{\{b\}} + \delta_{us} T_{vi}^{\{a} T_{ir}^{\{b\}} \right) \right\} \times \\
 &\quad \times \left\{ -G(s-x) G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) - \right. \\
 &\quad - \partial_\nu G(s-x) \partial_\nu G(s-y) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(s-z) + \\
 &\quad + \partial_\nu G(s-x) G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu G(s-z) + \\
 &\quad \left. + G(s-x) \partial_\nu G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu G(s-z) \right\}, \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 3} &= -\frac{2(2N_f^2 - 3)}{3F^2 N_f} G(0) \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) \times \\
 &\quad \times \left\{ \nu^2 T_{ur}^{\{a} T_{vs}^{\{b\}} - |\nu| T_{vr}^{\{a} T_{us}^{\{b\}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{|\nu|}{N_f} \left( \delta_{ur} T_{vi}^{\{a} T_{is}^{\{b\}} + \delta_{vs} T_{ui}^{\{a} T_{ir}^{\{b\}} \right) \right\} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

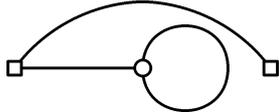
$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 4} &= -\frac{2}{3F^2} \left\{ [G(x-y) \partial_\mu G(y-z)]^2 + x \leftrightarrow y \right\} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} \left( \nu^2 T_{ur}^{\{a} T_{vs}^{\{b\}} - |\nu| T_{vr}^{\{a} T_{us}^{\{b\}} \right) + \right. \\
 &\quad + \frac{\nu}{4N_f |\nu|} \left[ (\nu(2N_f \nu - 3) + 3|\nu|) (T_{ui}^a T_{is}^b \delta_{vr} + T_{vi}^a T_{ir}^b \delta_{us}) + \right. \\
 &\quad \left. + (\nu(2N_f \nu + 3) + 3|\nu|) (T_{ui}^b T_{is}^a \delta_{vr} + T_{vi}^b T_{ir}^a \delta_{us}) \right] - \\
 &\quad - \frac{3\nu}{2N_f^2 |\nu|} \left[ (\nu + |\nu|(N_f \nu - 1)) (T_{vi}^a T_{is}^b \delta_{ur} + T_{ui}^a T_{ir}^b \delta_{vs}) + \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\nu + |\nu| + N_f \nu |\nu|) (T_{vi}^b T_{is}^a \delta_{ur} + T_{ui}^b T_{ir}^a \delta_{vs}) \right] \right\} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 5} &= -\frac{1}{F^2} G(x-y) \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) \times \\
 &\quad \left\{ \frac{|\nu|}{N_f} \left( (2 + N_f |\nu|) T_{vr}^{\{a} T_{us}^{\{b\}} - (N_f + 2|\nu|) T_{ur}^{\{a} T_{vs}^{\{b\}} \right) - \right.
 \end{aligned}$$

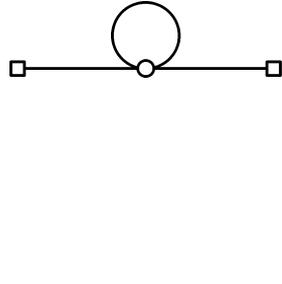
$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{N_f^2} (N_f \nu^2 + |\nu|) \left( \delta_{ur} T_{vi}^{\{a} T_{is}^{\}b\}} + \delta_{vs} T_{ui}^{\{a} T_{ir}^{\}b\}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\nu^2}{2} \left( \delta_{vr} T_{ui}^{\{a} T_{is}^{\}b\}} + \delta_{us} T_{vi}^{\{a} T_{ir}^{\}b\}} \right) \right\} \quad (4.8)
 \end{aligned}$$



$$= 0 \quad (4.9)$$



$$= 0 \quad (4.10)$$



$$\begin{aligned}
 & = -\frac{1}{3F^2} \left\{ (A - (3 + 4N_f |\nu|)) T_{ur}^{\{a} T_{vs}^{\}b\}} - \right. \\
 & \quad \left. - (A|\nu| - (4N_f - 3|\nu|)B) T_{vr}^{\{a} T_{us}^{\}b\}} \right\} - \\
 & \quad -\frac{1}{6F^2} \left\{ \nu^2 (A - 3B) (T_{ui}^{\{a} T_{is}^{\}b\}} \delta_{rv} + T_{vi}^{\{a} T_{ir}^{\}b\}} \delta_{us}) + \right. \\
 & \quad \left. + 8B|\nu| (T_{ui}^{\{a} T_{ir}^{\}b\}} \delta_{vs} + T_{vi}^{\{a} T_{is}^{\}b\}} \delta_{ur}) \right\} \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

In Gleichung 4.11 wurden die Abkürzungen

$$A = \partial_\mu^2 G(0) G(x-z) G(y-z) \quad (4.12)$$

$$B = G(0) \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) \quad (4.13)$$

verwendet.

Dass die Graphen 4.9 und 4.10 nicht beitragen, liegt an der Tensorstruktur des Operators der Ordnung  $\epsilon^5$ .

Der Graph 4.1 spielt eine gewisse Sonderrolle, denn er ist der einzige, der auch unverbundene Anteile enthalten kann, die ausschließlich Beiträge zum Vakuum liefern. Physikalisch relevant sind allerdings nur die verbundenen Anteile. Dies soll durch den Index verb. in Graph 4.1 angedeutet werden. Allgemein gilt für den Erwartungswert zweier beliebige verbundener Operatoren  $O_1$  und  $O_2$

$$\langle O_1 O_2 \rangle_{\text{verb.}} = \langle O_1 O_2 \rangle - \langle O_1 \rangle \langle O_2 \rangle. \quad (4.14)$$

Da die Schleife im Massenterm nur noch Nullmoden enthält, müssen die beiden Guppenintegrale

$$\left\langle U_{ki}U_{om}U_{\alpha\alpha} + U_{jk}^\dagger U_{no}^\dagger U_{\alpha\alpha}^\dagger \right\rangle \quad \text{und} \quad \left\langle U_{ki}U_{om} + U_{jk}^\dagger U_{no}^\dagger \right\rangle \left\langle U_{\alpha\alpha} + U_{\alpha\alpha}^\dagger \right\rangle \quad (4.15)$$

berechnet und von einander abgezogen werden. Das Ergebnis ist in Gleichung 4.1 abzulesen. Anstelle einer Schleife des Massenterms könnte man sich auch einen Beitrag eines verbundenen Graphen mit einer Schleife des Maßterms vorstellen. Hier ist es allerdings so, dass sich die rechte Seite von Gleichung 4.14 direkt weghebt, da die Summanden offensichtlich gleich sind.

## 4.2 $O_{27}$ in nachführender Ordnung

Nach der Projektion auf  $O_{27}$  und dem Ersetzen der T ergibt sich für die Graphen des vorangegangenen Kapitels

$$\text{Gl. 4.1} \rightarrow \frac{32}{15} \frac{G(0)}{F^2} \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) (\nu^2 - |\nu|), \quad (4.16)$$

$$\text{Gl. 4.2} \rightarrow \frac{-1}{5F^2V} \int d^4s \left( G(y-s) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + x \leftrightarrow y \right) (\nu^2 - |\nu|) \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Gl. 4.3} \rightarrow & \frac{-4}{15F^2V} \int d^4s \left( G(x-y) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + x \leftrightarrow y \right) \times \\ & \times |\nu| (5 + 3\nu^2 - 8|\nu|), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Gl. 4.4} \rightarrow & \frac{-2}{5F^2} \int d^4s \left( \partial_\nu^2 G(0) G(s-y) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + \right. \\ & \left. + G(0) \partial_\nu G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + x \leftrightarrow y \right) (\nu^2 - |\nu|), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \text{Gl. 4.5} \rightarrow & -\frac{2}{15F^2} (\nu^2 - |\nu|) \times \\ & \times \left\{ -G(s-x) G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) - \right. \\ & -\partial_\nu G(s-x) \partial_\nu G(s-y) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(s-z) + \\ & +\partial_\nu G(s-x) G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu G(s-z) + \\ & \left. +G(s-x) \partial_\nu G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu G(s-z) \right\}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\text{Gl. 4.6} \rightarrow \frac{-4G(0)}{3F^2} \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) (\nu^2 - |\nu|), \quad (4.21)$$

$$\text{Gl. 4.7} \rightarrow \frac{-2}{15F^2} \left( [G(x-y)\partial_\mu G(y-z)]^2 + x \leftrightarrow y \right) (\nu^2 - |\nu|), \quad (4.22)$$

$$\text{Gl. 4.8} \rightarrow \frac{-2}{15F^2} G(x-y)\partial_\mu G(x-z)\partial_\mu G(y-z)(\nu^2 - |\nu|), \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \text{Gl. 4.11} \rightarrow & \frac{2}{15F^2} \left( \partial_\mu^2 G(0) G(x-z)G(y-z) - \right. \\ & \left. -15G(0) \partial_\mu G(x-z)\partial_\mu G(y-z) \right) (\nu^2 - |\nu|). \end{aligned} \quad (4.24)$$

An dieser Stelle müssten die räumlichen Mittelungen und die zeitlichen Ableitungen berechnet werden. Die meisten dieser Berechnungen sind in Anhang C dargestellt, allerdings sind diese für den Graphen 4.20 zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht bekannt. Es muss darauf geachtet werden, dass die Ordnung der Korrelationsfunktion in nachführender Ordnung durch die räumliche Mittelung, welche von der Ordnung  $1/\epsilon^6$  ist, nur noch von der Ordnung  $\epsilon^2$  ist.

Da nicht alle Terme der nachführenden Ordnung bekannt sind, wird die Normierung auf Zweipunktfunktionen an dieser Stelle nur exemplarisch vorgeführt.

Die Normierung ist gegeben als

$$\begin{aligned} & \frac{[C_{27}]_\nu(x_0 - z_0, y_0 - z_0)}{B_\nu(x_0 - z_0)B_\nu(y_0 - z_0)} = \\ & = \frac{[C_{27}]_\nu(x_0 - z_0, y_0 - z_0)}{|\nu| \left\{ 1 + \frac{2\rho}{(FL)^2} \left( |\nu| - \frac{1}{N_f} \right) h_1(\tau_x) \right\} \times |\nu| \left\{ 1 + \frac{2\rho}{(FL)^2} \left( |\nu| - \frac{1}{N_f} \right) h_1(\tau_y) \right\}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

wobei die Funktionen  $\tau_x$  und  $h_1$  in Anhang C genauer beschrieben sind. Der Bruch kann nun entsprechend dem Zählschema im Epsilonregime entwickelt werden und man erhält

$$= \frac{1}{\nu^2} [C_{27}]_\nu(x_0 - z_0, y_0 - z_0) \times \left( 1 - \frac{2\rho}{(FL)^2} \left( |\nu| - \frac{1}{N_f} \right) (h_1(\tau_x) + h_1(\tau_y)) + O(\epsilon^4) \right). \quad (4.26)$$

Beim Ausmultiplizieren muss darauf geachtet werden, dass die Ordnung nicht über  $\epsilon^2$  hinaus geht, da man ansonsten aus der Dreipunktsfunktion auch noch Terme der Ordnung  $\epsilon^{10}$  benötigen würde.

### 4.3 $O_8$ in nachführender Ordnung

Nach der Projektion auf  $O_8$  und dem Ersetzen der T ergibt sich für die Graphen

$$\text{Gl. 4.1} \rightarrow \frac{8G(0)}{9F^2} \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) (3\nu^2 + 2|\nu|), \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Gl. 4.2} \rightarrow & \frac{-1}{12F^2V} \int d^4s \left( G(y-s) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + \right. \\ & \left. + x \leftrightarrow y \right) (3\nu^2 + 2|\nu|), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \text{Gl. 4.3} \rightarrow & \frac{-1}{36F^2V} \int d^4s \left( G(x-y) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + x \leftrightarrow y \right) \times \\ & \times |\nu| \left( 10 - 21\nu - (20 - 3\nu(5 + 12\nu)) \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \text{Gl. 4.4} \rightarrow & \frac{-1}{6F^2} (3\nu^2 + 2|\nu|) \int d^4s \left( \partial_\nu^2 G(0) G(s-y) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + \right. \\ & \left. + G(0) \partial_\nu G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu G(x-z) + x \leftrightarrow y \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \text{Gl. 4.5} \rightarrow & \frac{1}{12F^2} (3\nu^2 + 2|\nu|) \times \\ & \times \left\{ -G(s-x) G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) - \right. \\ & - \partial_\nu G(s-x) \partial_\nu G(s-y) \partial_\mu G(s-z) \partial_\mu G(s-z) + \\ & + \partial_\nu G(s-x) G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu G(s-z) + \\ & \left. + G(s-x) \partial_\nu G(s-y) \partial_\mu \partial_\nu G(s-z) \partial_\mu G(s-z) \right\}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\text{Gl. 4.6} \rightarrow \frac{-5G(0)}{9F^2} \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) (3\nu^2 + 2|\nu|), \quad (4.32)$$

$$\text{Gl. 4.7} \rightarrow \frac{-1}{36F^2} \left( [G(x-y) \partial_\mu G(y-z)]^2 + x \leftrightarrow y \right) (6\nu^2 - |\nu| + 5\nu), \quad (4.33)$$

$$\text{Gl. 4.8} \rightarrow \frac{1}{36F^2} G(x-y) \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) (9\nu^2 + 26|\nu|), \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \text{Gl. 4.11} \rightarrow & \frac{-1}{12F^2} \left( \partial_\mu^2 G(0) G(x-z) G(y-z) + \right. \\ & \left. + 5G(0) \partial_\mu G(x-z) \partial_\mu G(y-z) \right) (3\nu^2 + 2|\nu|), \end{aligned} \quad (4.35)$$

Auch die Korrelationsfunktion zu dem Operator  $O_8$  kann noch nicht normiert werden, da auch hier die entsprechenden Integrale, wie im vorangegangenen Unterkapitel beschrieben, noch nicht berechnet worden sind.



Der zweite Summand aus Gleichung 4.40 ist ein Kontaktterm und kann aus diesem Grund vernachlässigt werden.

Werden alle Terme aufsummiert, erhält man für die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned}
 \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \langle P^a(x) O'_8(z) P^b(y) \rangle = \\
 = \frac{2}{F^2 V} \left\{ \left( \frac{4}{3} \nu^2 + |\nu| \left( \frac{11}{9} + \nu^2 \right) \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \left[ G(x-z) G(y-z) + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + G(x-y) (G(x-z) + G(y-z)) \right] \right) - \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \int d^4 s G(x-s) G(s-y) \times \right. \\
 \times \left[ \left( \nu^2 + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{2F^2}{V} + \partial_\mu^2 G(0) \right) + \frac{1}{120V} \left\{ 4\nu^2 (63\nu^2 - 44) + \right. \right. \\
 \left. \left. + |\nu| (596 + 3\nu^2 (39\nu - 139)) \right\} \right] - \frac{1}{18} \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} [G(x-y)]^2 (15\nu^2 - 11|\nu|) \left. \right\}. \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Um die Korrelationsfunktion mit Ergebnissen aus der Gitter-QCD vergleichen zu können, müssen noch die Raum-Mittelungen und die Zeitableitungen der Nicht-Nullmoden-Propagatoren berechnet und die Korrelationsfunktion normiert werden. Das wird in dieser Arbeit allerdings nicht mehr dargestellt.

## 4.5 Direkte Bestimmung von $g'_8$

Das generelle Problem bei der Bestimmung der Niederenergiekonstanten  $g_8$  und  $g'_8$  ist, dass die Korrelationsfunktion des Operators  $\mathcal{O}_8$  auf QCD-Seite einer Linearkombination aus den Korrelationsfunktionen der Operatoren  $O_8$  und  $O'_8$  auf Seiten der chiralen Störungsrechnung entspricht. Das bedeutet konkret für den Fall mit zwei linkshändigen Strömen

$$\int d^3 x \int d^3 y \langle J_0^a(x) h_8 \mathcal{O}_8(0) J_0^b(y) \rangle \equiv g_8 [C_8]^{ab}(x_0, y_0) + g'_8 [C'_8]^{ab}(x_0, y_0). \quad (4.43)$$

In [17] wird eine Methode vorgestellt, auf welche Art und Weise es möglich ist, dieses Problem mit Zweipunktfunktionen aus einem linkshändigen Strom und dem Operator  $O'_8$  zu lösen.

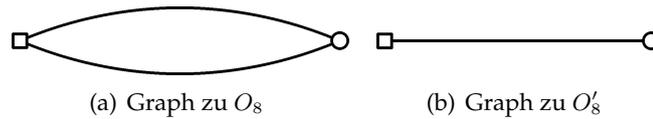
Dazu werden die Korrelationsfunktionen

$$[C_R]^a(x_0) \equiv \int d^3x \langle J_0^a(x) O_R(0) \rangle \quad (4.44)$$

für die Operatoren  $O_R = O_8$  und  $O_R = O'_8$  berechnet. Die Verknüpfung von Gitter-QCD und chiraler Störungstheorie geht hier analog zu der in Gleichung 4.43. Es ist nun allerdings so, dass die Korrelationsfunktion für den Operator  $O_8$  sowohl in führender als auch in nachführender Ordnung keinen Beitrag liefert und somit  $g'_8$  direkt bestimmt werden kann.

Wird anstelle eines linkshändigen Stroms eine pseudoskalare Dichte gewählt, so gibt es bereits in führender Ordnung Beiträge von beiden Operatoren und die Methode ist nicht mehr anwendbar. Dies wird im Folgenden gezeigt.

Der Graph zur führenden Ordnung der Korrelationsfunktion des Operators  $O_8$  und einer pseudoskalaren Dichte ist in Abbildung 4.1(a) dargestellt.



**Abbildung 4.1:** Graphen der Ordnung  $\epsilon^6$  zu  $O_8$  und  $O'_8$  mit einer pseudoskalaren Dichte. Ein leeres Quadrat steht für einen der Operatoren und ein leerer Kreis für eine Dichte.

Man erhält als Ergebnis nach Ausführen aller Kontraktionen, Berechnung der Gruppenintegrale und Wahl von physikalischen Indizes

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV) \langle P^a(x) O_8(0) \rangle = -\frac{5}{4} \nu \left[ \partial_\mu G(x) \right]^2 T_{ds}^a. \quad (4.45)$$

Für den Operator  $O'_8$  ist der Graph in 4.1(b) abgebildet, die Korrelationsfunktion lautet

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV) \langle P^a(x) O'_8(0) \rangle = \frac{2}{N_f V} \nu (1 + N_f |\nu|) G(x - z) T_{ds}^a. \quad (4.46)$$

Da beide Terme keine Kontaktterme sind, können die Niederenergiekonstanen nicht so einfach entkoppelt werden wie in dem Fall mit einem linkshändigen Strom. Es sei noch angemerkt, dass  $T_{ds}^a$  in diesem Fall ein neutrales Kaon darstellt, da für ein geladenes Kaon der Übergang zum Vakuum aus Gründen der Ladungserhaltung verboten ist.

## Kapitel 5

# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit sind die Dreipunktfunktionen für die Operatoren  $O_{27}$ ,  $O_8$  und  $O'_8$  in chiraler Störungstheorie berechnet worden. In führender Ordnung entspricht die Korrelationsfunktion des Operators  $O_{27}$  bis auf einen Faktor  $2/5$  denen aus [14]. Das war zu erwarten, da die dort vorgestellte Rechnung vom  $SU(4)$ -Fall ausgeht und der dort vorkommende Operator nicht projiziert wird.

Auch das Ergebnis der Korrelationsfunktion des Operators  $O_8$  verwundert nicht, da im  $SU(4)$ -Fall Terme vernachlässigt worden sind, die proportional zu Deltas mit generischen Indizes waren. Für eine  $SU(4)$ -Symmetrie kann dies gemacht werden, da alle generischen Indizes als unterschiedlich angenommen werden können. Für die Projektion auf die irreduzible Darstellung der  $SU(3)_L$ -Symmetrie dürfen diese Terme jedoch nicht vernachlässigt werden und liefern zusätzliche Beiträge zur Korrelationsfunktion.

An dieser Stelle können leider keine Abschätzungen der Korrekturen, die von der nachführenden Ordnung stammen, gemacht werden, da dazu noch die räumlichen Mittelungen des Graphen 4.5 berechnet werden müssen. Aus ähnlichen Gründen muss darauf verzichtet werden, die Beiträge des Operators  $O'_8$  zu quantifizieren.

In Kapitel 4.5 wurde eine Methode vorgestellt, auf welche Art es möglich ist, die Niederenergiekonstante  $g'_8$  direkt aus der Zweipunktfunktion eines linkshändigen Stroms und des Operatos  $O'_8$  zu berechnen. Es wurde gezeigt, dass diese Methode mit einer pseudo-skalaren Dichte und diesem Operator nicht funktioniert, da zusätzliche Beiträge des Operators  $O_8$  zu erwarten sind. Aus diesem Grund muss eine andere Methode herangezogen werden, um diese Niederenergiekonstanten zu bestimmen.

Es wäre zum Beispiel möglich, die Beiträge der beiden Operatoren zu trennen, indem eine sehr hohe Zeitauflösung in den Simulationen der Gitter-QCD angestrebt wird [17], was allerdings technisch sehr anspruchsvoll ist. Außerdem muss man zwischen der numerischen Effizienz und der Berechnung der Beiträge von  $O'_8$  abwägen.

Zusätzlich zu den Berechnungen der räumlichen Mittelungen müssen die Korrelationsfunktionen noch auf Seiten der Gitter-QCD simuliert werden.

Eine Machbarkeitsstudie ist im Rahmen einer Diplomarbeit von Thomas Tilli [28] durchgeführt worden. Entsprechende Produktionsläufe auf größeren Gittern mit hoher Statistik werden nötig sein, um die physikalischen Informationen zu extrahieren. Nachdem dies geleistet worden ist, können die Ergebnisse der Gitter-QCD mit denen aus der chiralen Störungstheorie verglichen werden.

Damit lassen sich dann die Niederenergiekonstanten berechnen, wodurch sich der Beitrag des Charmquarks zur  $\Delta I = 1/2$ -Regel bestimmen lässt.

## Anhang A

# Projektionsoperatoren

Die Projektionsoperatoren spielen eine wichtige Rolle, um die Gitter-QCD mit der chiralen Störungsrechnung zu verbinden. Aus diesem Grund werden sie hier ausführlich besprochen. Zunächst seien der Operator  $O_{rsuv}$ , der unter  $N_f^* \otimes N_f^* \otimes N_f \otimes N_f$  der  $SU(N_f)$  transformiert, und der Operator  $O_{ru}$ , der unter  $N_f^* \otimes N_f$  transformiert, gegeben.

Diese beiden generischen Operatoren müssen auf die irreduzible Darstellung der  $SU(N_f)_L$  mit den Projektionsoperatoren [17]:

$$(P_1^\sigma)_{\tilde{r}\tilde{s}\tilde{u}\tilde{v};rsuv} \equiv \frac{1}{4} (\delta_{\tilde{r}\tilde{r}}\delta_{\tilde{s}\tilde{s}} + \sigma\delta_{\tilde{r}\tilde{s}}\delta_{\tilde{s}\tilde{r}}) (\delta_{\tilde{u}\tilde{u}}\delta_{\tilde{v}\tilde{v}} + \sigma\delta_{\tilde{u}\tilde{v}}\delta_{\tilde{v}\tilde{u}}), \quad (\text{A.1})$$

$$(P_2^\sigma)_{\tilde{r}\tilde{s}\tilde{u}\tilde{v};rsuv} \equiv \delta_{\tilde{r}\tilde{r}}\delta_{\tilde{s}\tilde{s}}\delta_{\tilde{u}\tilde{u}}\delta_{\tilde{v}\tilde{v}} + \frac{1}{(N_f + 2\sigma)(N_f + \sigma)} (\delta_{\tilde{r}\tilde{u}}\delta_{\tilde{s}\tilde{v}} + \sigma\delta_{\tilde{r}\tilde{v}}\delta_{\tilde{s}\tilde{u}}) \delta_{ru}\delta_{sv} - \frac{1}{N_f + 2\sigma} (\delta_{\tilde{r}\tilde{u}}\delta_{\tilde{s}\tilde{s}}\delta_{\tilde{v}\tilde{v}}\delta_{ru} + \delta_{\tilde{s}\tilde{v}}\delta_{\tilde{r}\tilde{r}}\delta_{\tilde{u}\tilde{u}}\delta_{sv} + \sigma\delta_{\tilde{r}\tilde{v}}\delta_{\tilde{s}\tilde{s}}\delta_{\tilde{u}\tilde{u}}\delta_{ru} + \sigma\delta_{\tilde{s}\tilde{u}}\delta_{\tilde{r}\tilde{r}}\delta_{\tilde{v}\tilde{v}}\delta_{sv}), \quad (\text{A.2})$$

$$(P_3)_{\tilde{r}\tilde{u};ru} \equiv \delta_{\tilde{r}\tilde{r}}\delta_{\tilde{u}\tilde{u}} - \frac{1}{N_f} \delta_{\tilde{r}\tilde{u}}\delta_{\tilde{u}\tilde{r}}, \quad (\text{A.3})$$

projiziert werden. Es gibt drei Operatoren  $O_{27}, O_8$  und  $O'_8$

$$[O_{27}]_{\tilde{r}\tilde{s}\tilde{u}\tilde{v}} \equiv (P_2^+ P_1^+)_{\tilde{r}\tilde{s}\tilde{u}\tilde{v};rsuv} O_{rsuv}, \quad (\text{A.4})$$

$$[O_8^\pm]_{\tilde{r}\tilde{u}} \equiv (P_3)_{\tilde{r}\tilde{u};\hat{r}\hat{u}} (P_1^\pm)_{\hat{r}\hat{s}\hat{u}\hat{s};rsuv} O_{rsuv}, \quad (\text{A.5})$$

$$[O'_8]_{\tilde{r}\tilde{u}} \equiv (P_3)_{\tilde{r}\tilde{u};ru} O'_{ru}, \quad (\text{A.6})$$

welche das richtige Transformationsverhalten besitzen. In Kapitel 3 und 4 treten letztendlich nicht beliebige generischen Operatoren  $O_{rsuv}$  auf, sondern sechs verschiedene faktorisierte Formen,

$$[O_1]_{rsuv} \equiv Q_{ur}R_{vs}, \quad (\text{A.7})$$

$$[O_2]_{rsuv} \equiv Q_{us}R_{vr}, \quad (\text{A.8})$$

$$[O_3]_{rsuv} \equiv \delta_{ur}R_{vs}, \quad (\text{A.9})$$

$$[O_4]_{rsuv} \equiv \delta_{us}R_{vr}, \quad (\text{A.10})$$

$$[O_5]_{rsuv} \equiv \delta_{ur}\delta_{vs}, \quad (\text{A.11})$$

$$[O_6]_{rsuv} \equiv \delta_{us}\delta_{vr}, \quad (\text{A.12})$$

$$(\text{A.13})$$

wobei Q und R Kombinationen der  $T^a$  beziehungsweise  $T^b$  sind. Nach der Projektion auf  $SU(3)_L$  ergibt sich für diese sechs Terme

$$\begin{aligned} [P_2^\sigma P_1^\sigma O_1]_{rsuv} &= S_{rsuv}^\sigma(Q, R), & [P_3 P_1^\sigma O_1]_{ru} &= T_{ru}^\sigma(Q, R), \\ [P_2^\sigma P_1^\sigma O_2]_{rsuv} &= \sigma S_{rsuv}^\sigma(Q, R), & [P_3 P_1^\sigma O_2]_{ru} &= \sigma T_{ru}^\sigma(Q, R), \\ [P_2^\sigma P_1^\sigma O_3]_{rsuv} &= 0, & [P_3 P_1^\sigma O_3]_{ru} &= U_{ru}^\sigma(R), \\ [P_2^\sigma P_1^\sigma O_4]_{rsuv} &= 0, & [P_3 P_1^\sigma O_4]_{ru} &= \sigma U_{ru}^\sigma(R), \\ [P_2^\sigma P_1^\sigma O_5]_{rsuv} &= 0, & [P_3 P_1^\sigma O_5]_{ru} &= 0, \\ [P_2^\sigma P_1^\sigma O_6]_{rsuv} &= 0, & [P_3 P_1^\sigma O_6]_{ru} &= 0, \end{aligned}$$

mit der abkürzenden Schreibweise

$$\begin{aligned} S_{rsuv}\sigma(Q, R) &= \frac{1}{4} \left\{ Q_{ur}R_{vs} + Q_{vs}R_{ur} + \sigma(Q_{us}R_{vr} + Q_{vr}R_{us}) + \right. \\ &+ \frac{2(\delta_{us}\delta_{vr} + \delta_{ur}\delta_{vs})}{(N_f + \sigma)(N_f + 2\sigma)} (\text{Tr}[QR] + \sigma \text{Tr}[Q] \text{Tr}[R]) - \\ &- \frac{\delta_{vr}}{N_f + 2\sigma} (\{Q, R\}_{us} + \text{Tr}[Q]R_{us} + Q_{us} \text{Tr}[R]) - \\ &- \frac{\delta_{us}}{N_f + 2\sigma} (\{Q, R\}_{vr} + \text{Tr}[Q]R_{vr} + Q_{vr} \text{Tr}[R]) - \\ &- \frac{\delta_{ur}}{N_f + 2\sigma} (\{Q, R\}_{vs} + \text{Tr}[Q]R_{vs} + Q_{vs} \text{Tr}[R]) - \\ &\left. - \frac{\delta_{vs}}{N_f + 2\sigma} (\{Q, R\}_{ur} + \text{Tr}[Q]R_{ur} + Q_{ur} \text{Tr}[R]) \right\}, \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

$$T_{ru}^\sigma(Q, R) = \frac{1}{4} (\sigma\{Q, R\}_{ur} + Q_{ur} \text{Tr}[R] + \text{Tr}[Q]R_{ur}) - \frac{\delta_{ur}}{2N_f} (\text{Tr}[Q] \text{Tr}[R] + \sigma \text{Tr}[QR]), \quad (\text{A.15})$$

$$U_{ru}^\sigma(R) = \frac{1}{4} (N_f + 2\sigma) \left( R_{ur} - \frac{\delta_{ur}}{N_f} \text{Tr}[R] \right). \quad (\text{A.16})$$

## Anhang B

# Gruppenintegrale

Es gibt verschiedene Methoden die auftretenden Gruppenintegrale zu berechnen [11], [20], [10], [4]. Die hier verwendete ist allerdings sehr handlich und praktikabel. Der Vorteil dieser Methode ist, dass man mit ihr beliebige Gruppenintegrale auf Integrale über Spuren der Nullmoden zurückführt. Aus diesem Grund wird damit begonnen, Gruppenintegrale über Spuren der Gruppenelemente zu berechnen [9], [3]. Ausgangspunkt ist das erzeugende Gruppenintegral bei festem  $\nu$ , welches bekannt ist

$$Z_\nu(\mu) = \int_{U \in U(N)} d\mu(U) (\det U)^\nu e^{\mu \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U}. \quad (\text{B.1})$$

Dieses Gruppenintegral kann durch eine Determinante über eine  $N_f \times N_f$  Matrix ausgedrückt werden [9], deren Einträge  $(i, j)$  die modifizierten Besselfunktionen  $I_{\nu+j-i}$  sind

$$Z_\nu(\mu) = \det [I_{\nu+j-i}]. \quad (\text{B.2})$$

Die konkreten Gruppenintegrale können durch Ableitungen nach  $\mu$  dargestellt werden, deshalb bietet sich eine abkürzende Schreibweise an:

$$\sigma_\nu(\mu) \equiv \frac{\Sigma_\nu(\mu)}{\Sigma} \equiv \frac{1}{N_f} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\nu(\mu). \quad (\text{B.3})$$

Da im Epsilonregime die Massen sehr klein sind und man nur an den Polen der Gruppenintegrale interessiert ist, kann  $\sigma_\nu(\mu)$  für nichtverschwindendes  $\nu$  genähert werden

$$\sigma_\nu(\mu) \approx \frac{|\nu|}{\mu}. \quad (\text{B.4})$$

Wie im Haupttext wird auch hier die abkürzende Schreibweise

$$\langle \dots \rangle_\nu^\mu \equiv \frac{\int_{U \in U(N)} d\mu(U) (\dots) (\det U)^\nu e^{\mu \text{Re Tr } U}}{\int_{U \in U(N)} d\mu(U) (\det U)^\nu e^{\mu \text{Re Tr } U}} \quad (\text{B.5})$$

für Erwartungswerte verwendet. Allerdings werden die Indizes bei  $\langle \dots \rangle_\nu^\mu$  weggelassen. Mit der Definition einer Gruppenableitung wird eine Identität aufgestellt, mit deren Hilfe die Gruppenintegrale berechnet werden können. Diese Ableitung in einer bestimmten Darstellung kann entweder nach rechts

$$F(U e^{i\epsilon_a t^a}) = F(U) + \epsilon_a \nabla_R^a F(U) + \dots \quad (\text{B.6})$$

oder nach links

$$F(e^{i\epsilon_a t^a} U) = F(U) + \epsilon_a \nabla_L^a F(U) + \dots \quad (\text{B.7})$$

wirken, wobei die  $t^a$  Erzeuger der Gruppe  $U(N_f)$  sind. Für die weiteren Berechnungen reicht die Ableitung nach links vollkommen aus. Aus diesem Grund wird der Index L weggelassen. Man sieht leicht, dass die Ableitung durch

$$\nabla^a = i (t^a U)_{ij} \frac{\partial}{\partial U_{ij}} \quad (\text{B.8})$$

gegeben ist. Durch komplexe Konjugation erhält man die Wirkung der Ableitung auf die komplex-konjugierten Felder

$$\nabla^a U^\dagger = -i U^\dagger t^a. \quad (\text{B.9})$$

Die Ableitung aus Gleichung B.8 erfüllt zwei wichtige Relationen. Zum einen gehorcht sie einer Lie-Algebra

$$[\nabla^a, \nabla^b] = f^{abc} \nabla^c \quad (\text{B.10})$$

mit der Strukturkonstante  $f^{abc}$  und zum anderen erfüllt sie die Leibnitzregel

$$\nabla^a (FG) = (\nabla^a F) G + F (\nabla^a G). \quad (\text{B.11})$$

Da das Haar-Maß invariant auf der Gruppenmannigfaltigkeit ist, ist die Identität

$$\int dU \nabla^a F(U) = 0 \quad (\text{B.12})$$

offensichtlich. Mit Hilfe der Leibnitzregel bekommt man eine einfache Vorschrift zum Berechnen der Gruppenintegrale

$$\int dU \text{Tr} \left[ t^a \nabla^a \left( F(U) (\det U)^\nu e^{S(U)} \right) \right], \quad (\text{B.13})$$

wobei hier

$$S(U) \equiv \frac{\mu}{2} \text{Tr} [U + U^\dagger]. \quad (\text{B.14})$$

Mit der Vollständigkeitsrelation  $t_{ij}^a t_{kl}^a = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk}$  der Generatoren  $t^a$  der Gruppe  $U(N_f)$  und der Normalisierung der Generatoren  $\text{Tr} (t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$  können die Gruppenintegrale berechnet werden. Wählt man  $F(U)=U$ , so erhält man

$$\langle \text{Tr} [U^2] \rangle = N_f - \frac{2(N_f + \nu)}{\mu} \langle \text{Tr} U \rangle. \quad (\text{B.15})$$

Da das Integrationsmaß in Gleichung B.13 für  $\nu \neq 0$  nicht reell ist, folgt die Identität für  $U^\dagger$  nicht automatisch. Konkret erhält man

$$\langle \text{Tr} [(U^\dagger)^2] \rangle = N_f - \frac{2(N_f - \nu)}{\mu} \langle \text{Tr} U^\dagger \rangle. \quad (\text{B.16})$$

Wie man sieht, kann das komplex-konjugierte Gruppenintegral durch eine Ersetzung von  $\nu$  durch  $-\nu$  erhalten werden. Dies gilt generell, auch wenn nicht nur Spuren vorkommen.

Die Berechnungen der vorkommenden Gruppenintegrale werden im Folgenden aufgelistet. Allerdings ist zu beachten, dass nur die Pole von Interesse sind und somit auch nur diese hier angegeben werden.

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV\Sigma) \langle \text{Tr} [U] \rangle = N_f (|\nu| - \nu) \quad (\text{B.17})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV\Sigma)^2 \langle \text{Tr} [U^2] \rangle = -2N_f(N_f + \nu)(|\nu| - \nu) \quad (\text{B.18})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV\Sigma)^2 \langle \text{Tr} [U] \text{Tr} [U^\dagger] \rangle = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV\Sigma)^2 \langle (\text{Tr} [U])^2 \rangle = -2N_f(1 + N_f\nu)(|\nu| - \nu) \quad (\text{B.20})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV\Sigma)^3 \langle \text{Tr} [U^3] \rangle = 4N_f(1 + N_f^2 + 3N_f\nu + \nu^2)(|\nu| - \nu) \quad (\text{B.21})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV\Sigma)^3 \langle \text{Tr} [U] \text{Tr} [U^2] \rangle = 4N_f(2N_f + (2 + N_f^2)\nu + N_f\nu^2)(|\nu| - \nu) \quad (\text{B.22})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV\Sigma)^3 \langle \text{Tr} [U^\dagger] \text{Tr} [U^2] \rangle = 0 \quad (\text{B.23})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV\Sigma)^3 \langle (\text{Tr} [U])^3 \rangle = 4N_f(2 + 3N_f\nu + N_f^2\nu^2)(|\nu| - \nu) \quad (\text{B.24})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} (mV\Sigma)^3 \langle \text{Tr} [U^\dagger] (\text{Tr} [U^2])^2 \rangle = 0 \quad (\text{B.25})$$

Da alle notwendigen Integrale über Spuren von Nullmoden bekannt sind, können die für die Korrelationsfunktionen benötigten Integrale berechnet werden.

Auf Grund der Invarianz des Integrationsmaßes kann jedes beliebige Gruppenintegral mit zwei Gruppenelementen A und B der Menge  $\{U, U^\dagger\}$  als

$$\langle A_{ij} B_{kl} \rangle = c_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + c_2 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\text{B.26})$$

dargestellt werden [14]. Werden bekannte Gruppenintegrale gewählt, so entsteht ein lineares Gleichungssystem, welches einfach gelöst werden kann. Ganz konkret kann man zum Beispiel, einsteinsche Summenkonvention vorausgesetzt,

$$\langle \text{Tr}[AB] \rangle = \langle A_{ij} B_{ji} \rangle = c_1 \delta_{ij} \delta_{ji} + c_2 \delta_{ii} \delta_{jj} = N_f c_1 + N_f^2 c_2 \quad (\text{B.27})$$

und

$$\langle \text{Tr}[A] \text{Tr}[A] \rangle = \langle A_{ii} B_{jj} \rangle = c_1 \delta_{ii} \delta_{jj} + c_2 \delta_{ij} \delta_{ji} = N_f^2 c_1 + N_f c_2 \quad (\text{B.28})$$

wählen, was als Lösung die Koeffizienten

$$c_1 = \frac{1}{N_f(N_f^2 - 1)} (N_f \langle \text{Tr}[A] \text{Tr}[B] \rangle - \langle \text{Tr}[AB] \rangle) \quad (\text{B.29})$$

$$c_2 = \frac{1}{N_f(N_f^2 - 1)} (N_f \langle \text{Tr}[AB] \rangle - \langle \text{Tr}[A] \text{Tr}[B] \rangle) \quad (\text{B.30})$$

liefert. Daraus können die benötigten Integrale berechnet werden

$$\langle U_{ij} U_{kl} \rangle = c_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + c_2 \delta_{il} \delta_{jk} = \frac{2}{\mu^2} (\nu - |\nu|) (\nu \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (\text{B.31})$$

$$\langle U_{ij}^\dagger U_{kl}^\dagger \rangle = c_1^\dagger \delta_{ij} \delta_{kl} + c_2^\dagger \delta_{il} \delta_{jk} = \frac{2}{\mu^2} (\nu + |\nu|) (\nu \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (\text{B.32})$$

## GRUPPENINTEGRALE

---

Für drei Felder ist die Berechnung etwas komplizierter, da man sechs Gleichungen benötigt. Aus der Invarianz folgt

$$\begin{aligned} \langle A_{ij} B_{kl} C_{mn} \rangle = & c_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + c_2 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + c_3 \delta_{kl} \delta_{in} \delta_{jm} + \\ & + c_4 \delta_{mn} \delta_{il} \delta_{jk} + c_5 \delta_{jk} \delta_{lm} \delta_{ni} + c_6 \delta_{jm} \delta_{nk} \delta_{li}. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Für die Koeffizienten ergeben sich dann folgende Werte

$$c_1 = \frac{2(A_5 + A_6) - N_f(A_2 + A_3 + A_4) + (N_f^2 - 2)A_1}{N_f(4 - 5N_f^2 + N_f^4)}, \quad (\text{B.34})$$

$$c_2 = \frac{2(A_2 + A_3) - N_f(A_1 + A_5 + A_6) + (N_f^2 - 2)A_4}{N_f(4 - 5N_f^2 + N_f^4)}, \quad (\text{B.35})$$

$$c_3 = \frac{2(A_2 + A_4) - N_f(A_1 + A_5 + A_6) + (N_f^2 - 2)A_3}{N_f(4 - 5N_f^2 + N_f^4)}, \quad (\text{B.36})$$

$$c_4 = \frac{2(A_3 + A_4) - N_f(A_1 + A_5 + A_6) + (N_f^2 - 2)A_2}{N_f(4 - 5N_f^2 + N_f^4)}, \quad (\text{B.37})$$

$$c_5 = \frac{2(A_1 + A_6) - N_f(A_2 + A_3 + A_4) + (N_f^2 - 2)A_5}{N_f(4 - 5N_f^2 + N_f^4)}, \quad (\text{B.38})$$

$$c_6 = \frac{2(A_1 + A_5) - N_f(A_2 + A_3 + A_4) + (N_f^2 - 2)A_6}{N_f(4 - 5N_f^2 + N_f^4)}. \quad (\text{B.39})$$

Hier wurden die Abkürzungen

$$A_1 = \langle \text{Tr}[A] \text{Tr}[B] \text{Tr}[C] \rangle, \quad (\text{B.40})$$

$$A_2 = \langle \text{Tr}[AB] \text{Tr}[C] \rangle, \quad (\text{B.41})$$

$$A_3 = \langle \text{Tr}[AC] \text{Tr}[B] \rangle, \quad (\text{B.42})$$

$$A_4 = \langle \text{Tr}[BC] \text{Tr}[A] \rangle, \quad (\text{B.43})$$

$$A_5 = \langle \text{Tr}[ABC] \rangle, \quad (\text{B.44})$$

$$A_6 = \langle \text{Tr}[ACB] \rangle, \quad (\text{B.45})$$

$$(\text{B.46})$$

verwendet. Mit diesen Koeffizienten ist es möglich, beliebige Gruppenintegrale mit drei Feldern zu berechnen. Wird für A, B und C zum Beispiel

$$A = B = C = U \quad (\text{B.47})$$

gewählt, so erhält man mit den Integralen aus den Gleichungen B.21, B.22 und B.24 für  $c_1$

$$c_1 = \frac{4\nu^2}{\mu^3}(|\nu| - \nu) \quad (\text{B.48})$$

Auch an dieser Stelle sei nochmals angemerkt, dass Integrale, welche nicht vollständig aus  $U$  oder  $U^\dagger$  bestehen, nicht beitragen können, da Integrale über die Spuren (wie B.23 und B.25) nicht beitragen.

## Anhang C

# Räumliche Mittelung der Propagatoren

Der Propagator für die Nicht-Nullmoden ist definiert als

$$G(x) = \frac{1}{V} \sum_p \left(1 - \delta_{n,0}^{(4)}\right) \frac{e^{ipx}}{p^2} \quad (\text{C.1})$$

und gehorcht der Differentialgleichung

$$-\partial^2 G(x) = \delta(x) - \frac{1}{V}. \quad (\text{C.2})$$

Um die räumliche Mittelung des Propagators zu bestimmen, wird zunächst die Funktion

$$h_1(\tau) = \int_{\mathbf{x}} G(x) \quad (\text{C.3})$$

definiert. Diese Funktion kann aus der Differentialgleichung C.2 berechnet werden, indem diese über den Raum gemittelt wird. Mit der Definition C.3 erhält man so eine neue Differentialgleichung für  $h_1(\tau)$

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} h_1(\tau) = \delta(\tau) - 1, \quad (\text{C.4})$$

welche im Intervall  $-1 < \tau < 1$  die allgemeine Lösung

$$h_1(\tau) = \frac{1}{2} \left[ (|\tau| - \frac{1}{2})^2 + b_1 + b_2\tau \right]. \quad (\text{C.5})$$

besitzt. Der Koeffizient  $b_2$  ist gleich null, da  $h_1(\tau)$  unter der Ersetzung  $\tau \rightarrow -\tau$  gerade ist.

Aus

$$\int_0^1 d\tau h_1(\tau) = 0 \quad (\text{C.6})$$

folgt außerdem  $b_1 = -\frac{1}{12}$ .

Alle benötigten räumlichen Mittelungen lassen sich mit Hilfe der Definition des Propagators C.1 und der Differentialgleichung C.2 bestimmen. Mit den Abkürzungen  $\tau_x = (x_0 - z_0)/T$  und  $\tau_y = y_0 - z_0/T$  erhält man konkret [14]:

$$\partial_{x_0} \int_{\mathbf{x}} G(x - z) = h_1'(\tau_x), \quad (\text{C.7})$$

$$\partial_{x_0} \int_{\mathbf{x}} \partial_\mu G(x - z) = \frac{\delta_{\mu 0}}{T}, \quad (\text{C.8})$$

$$\partial_{y_0} \int_{\mathbf{y}} \int_{\mathbf{s}} \partial_\mu G(y - s) G(s - z) = -\delta_{\mu 0} T h_1(\tau_y), \quad (\text{C.9})$$

$$\partial_{y_0} \int_{\mathbf{y}} \int_{\mathbf{s}} \partial_\mu \partial_\nu G(y - s) \partial_\nu G(s - z) = -\frac{\delta_{\mu 0}}{T}, \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} G(x - y) [\partial_\mu G(y - z)]^2 &= \\ &= \frac{1}{V} \left\{ -f_1(\tau_y) + 2h'(\tau_x - \tau_y) \left[ h_1'(\tau_y) + 2 \sum_{\mathbf{p} \neq \mathbf{0}} |\mathbf{p}|^2 C_{\mathbf{p}}(\tau_y) C_{\mathbf{p}}'(\tau_y) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} G(x - y) \partial_\mu G(x - z) \partial_\mu G(y - z) &= \\ &= \frac{1}{V} \left\{ -h_1'(\tau_x) h_1'(\tau_y) + h_1'(\tau_x - \tau_y) [h_1'(\tau_x) - h_1'(\tau_y)] + h_1(\tau_x - \tau_y) \right\} = \\ &= -\frac{1}{V} H(\tau_x, \tau_y), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_0} \partial_{y_0} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \int_{\mathbf{s}} [G(x - s) G(y - s) \partial_\mu \partial_\nu G(s - z) \partial_\mu \partial_\nu G(s - z) + \\ + \partial_\nu G(x - s) G(y - s) \partial_\mu G(s - z) \partial_\mu \partial_\nu G(s - z) + \\ + \partial_\nu G(x - s) \partial_\nu G(y - s) \partial_\mu G(s - z) \partial_\mu G(s - z) + \\ + G(x - s) \partial_\nu G(y - s) \partial_\mu G(s - z) \partial_\mu \partial_\nu G(s - z)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \frac{G(0)}{T^2} + \frac{1}{2V} \{ h'_1(\tau_x) h'_1(\tau_y) + 7 h'_1(\tau_x - \tau_y) [h'_1(\tau_x) - h'_1(\tau_y)] - \\
 &\quad - 3 [h_1(\tau_x - \tau_y) + h_1(\tau_x) + h_1(\tau_y)] - 4 [f_1(\tau_x) + f_1(\tau_y)] \} - \\
 &\quad - \frac{4}{V} \sum_{\mathbf{p} \neq \mathbf{0}} \{ h'(\tau_x - \tau_y) |\mathbf{p}|^2 [C_{\mathbf{p}}(\tau_y) C'_{\mathbf{p}}(\tau_y) - C_{\mathbf{p}}(\tau_x) C'_{\mathbf{p}}(\tau_x)] \}. \quad (\text{C.13})
 \end{aligned}$$

Die Funktionen  $f_1$  ist definiert als

$$f_1(\tau) \equiv [h'_1(\tau)]^2 + \sum_{\mathbf{p} \neq \mathbf{0}} [|\mathbf{p}|^2 C_{\mathbf{p}}(\tau)^2 + C'_{\mathbf{p}}(\tau)^2], \quad (\text{C.14})$$

wobei

$$C_{\mathbf{p}}(\tau) \equiv \frac{\cosh(|\mathbf{p}|[\tau - \frac{1}{2}])}{2|\mathbf{p}| \sinh(|\mathbf{p}|/2)}, \quad C'_{\mathbf{p}}(\tau) \equiv \frac{\sinh(|\mathbf{p}|[\tau - \frac{1}{2}])}{2|\mathbf{p}| \sinh(|\mathbf{p}|/2)}. \quad (\text{C.15})$$

Die Identität

$$h'_1(\tau_x) h'_1(\tau_y) + h'_1(\tau_x - \tau_y) [h'_1(\tau_x) - h'_1(\tau_y)] = h_1(\tau_x - \tau_y) + h_1(\tau_x) + h_1(\tau_y) \quad (\text{C.16})$$

ist nützlich beim Zusammenfassen der einzelnen Feynmangraphen. Zu guter Letzt wird noch der Ausdruck für den Propagator an einem festen Ort benötigt

$$G(0) = -\frac{\beta_1}{\sqrt{V}}, \quad \partial_{\mu}^2 G(0) = \frac{1}{V}, \quad (\text{C.17})$$

wobei  $\beta_1$  von der Geometrie des betrachteten Raumbereiches abhängt. Weiteres zu den Propagatoren ist in [12] und [11] zu finden.

## Anhang D

# Tensorstruktur mit physikalischen Indizes

Durch die konkrete Wahl der T

$$T_{ij}^a \rightarrow \delta_{iu}\delta_{js} \quad (\text{D.1})$$

$$T_{ij}^b \rightarrow \delta_{id}\delta_{ju} \quad (\text{D.2})$$

können nur bestimmte Indexkombinationen beim Übergang von generischen zu physikalischen Indizes überleben. Beim Operator  $O_{27}$  ist die Ersetzung nach den Gleichungen 2.12 und 2.14

$$\begin{aligned} r &\rightarrow s, & v &\rightarrow d, \\ s &\rightarrow u, & u &\rightarrow u. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Wird beachtet, dass die T spurlos sind und dass Deltas mit zwei gleichen Indizes eins sind, sind die Tensorstrukturanteile

$$T_{vs}^a T_{ur}^b \rightarrow T_{du}^a T_{us}^b = 0, \quad T_{vr}^a T_{us}^b \rightarrow T_{ds}^a T_{uu}^b = 0, \quad (\text{D.4})$$

$$T_{us}^a T_{vr}^b \rightarrow T_{uu}^a T_{ds}^b = 0, \quad T_{ur}^a T_{vs}^b \rightarrow T_{us}^a T_{du}^b = 1, \quad (\text{D.5})$$

$$T_{vi}^a T_{ir}^b \rightarrow T_{di}^a T_{is}^b = 0, \quad T_{ir}^a T_{vi}^b \rightarrow T_{is}^a T_{di}^b = 1. \quad (\text{D.6})$$

Für den Operator  $O_8$  ist die Ersetzung der Indizes etwas anders, da über den generischen Index  $s$  explizit summiert wird. Es wird

$$r \rightarrow s, \quad u \rightarrow d \tag{D.7}$$

ersetzt, was für die Tensorstruktur

$$T_{ui}^a T_{ir}^b = T_{di}^a T_{is}^b = 0, \quad T_{ir}^a T_{ui}^b = T_{is}^a T_{di}^b = 1 \tag{D.8}$$

bedeutet. Da der Operator  $O'_8$  nur ein Zweiquark-Operator ist und die Korrelationsfunktion direkt mit physikalischen Indizes berechnet wird, muss keine Ersetzung vorgenommen werden und es kann direkt mit den physikalischen gerechnet werden. Die Beiträge der Tensorstruktur sind die selben wie in Gleichung D.8.

## Anhang E

# Mathematica Notebook eines Graphen des Operators $O'_8$

Die Berechnung des Graphen aus Gleichung 4.39 soll hier genauer vorgestellt werden, da er der einzige ist, der vier Nullmoden enthält. Der Übersicht wegen ist der Graph noch einmal in Abbildung E.1 dargestellt. Die Korrelationsfunktion dieses Graphen ist

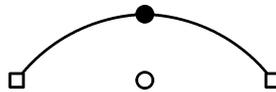


Abbildung E.1: Der zu berechnende Graph

$$\begin{aligned}
 & \lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \langle P^a(x) O'_8(z) P^b(y) \rangle = \\
 & = \lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \frac{m^2 \Sigma^4}{F^2} \int d^4 s \langle \text{Tr} [T^a(\xi(x)U + U^\dagger \xi(x))] (U_{ds} + U_{ds}^\dagger) \times \\
 & \quad \times \text{Tr} [T^b(\xi(y)U + U^\dagger \xi(y))] \text{Tr} [\xi(s)^2 (U + U^\dagger)] \rangle = \\
 & = \lim_{m \rightarrow 0} (mV)^2 \frac{m^2 \Sigma^4}{F^2} T_{ij}^a T_{mn}^b \int d^4 s \langle U_{ki} U_{om} U_{ds} U_{\gamma\alpha} \xi(x)_{jk} \xi(y)_{no} \xi(s)_{\alpha\beta} \xi(s)_{\beta\gamma} + \\
 & \quad + U_{jk}^\dagger U_{no}^\dagger U_{ds}^\dagger U_{\gamma\alpha}^\dagger \xi(x)_{ki} \xi(y)_{om} \xi(s)_{\alpha\beta} \xi(s)_{\beta\gamma} \rangle. \quad (\text{E.1})
 \end{aligned}$$

Auch bei vier Felder ist es so, dass Mischterme aus  $U$  und  $U^\dagger$  nicht beitragen können, da die Integrale über die Spuren verschwinden oder sich die  $U$  gegenseitig aufheben und das so entstandene Integral nicht mehr die richtige Ordnung in  $\mu$  hat.

Die Berechnung der Korrelationsfunktion und damit der Gruppenintegrale ist recht kompliziert, da für die Berechnung der Gruppenintegrale ein lineares Gleichungssystem mit 24 Gleichungen gelöst werden muss. Aus diesem Grund ist das vollständige Mathematica-Notebook hier dargestellt und wird ausführlich erläutert.

*Alle Eingaben in das Notebook sind fett gedruckt, die Ausgaben stehen direkt anschließend in geschweiften Klammern.*

*Zunächst werden die Ersetzungen  $U_s$  und  $U_{dagger_s}$  definiert. Sie sorgen dafür, dass vier Nullmodenfelder mit beliebigen Indizes in die 24 Konstanten  $c_1$ - $c_{24}$  mit zugehöriger Deltastruktur umgeschrieben werden. Die vier Felder sind in einem Vektor zusammengefasst, da eine einfache Multiplikation die Reihenfolge nicht beachten würde, was beim Lösen des Gleichungssystems zu Problemen führt. Außerdem wurde wegen vereinfachter Schreibweise  $N_f$  durch  $N$  ersetzt.*

$$\begin{aligned}
 U_s = \{ & U_{i,j}, U_{k,l}, U_{m,n}, U_{o,p} \} \rightarrow c1 * \delta_{i,j} * \delta_{k,l} * \delta_{m,n} * \delta_{o,p} + c2 * \delta_{i,j} * \delta_{k,l} * \delta_{m,p} * \delta_{n,o} + \\
 & + c3 * \delta_{i,j} * \delta_{m,n} * \delta_{k,p} * \delta_{l,o} + c4 * \delta_{i,j} * \delta_{o,p} * \delta_{k,n} * \delta_{l,m} + c5 * \delta_{k,l} * \delta_{m,n} * \delta_{i,p} * \delta_{j,o} + \\
 & + c6 * \delta_{k,l} * \delta_{o,p} * \delta_{i,n} * \delta_{j,m} + c7 * \delta_{m,n} * \delta_{o,p} * \delta_{i,l} * \delta_{j,k} + c8 * \delta_{i,j} * \delta_{l,m} * \delta_{n,o} * \delta_{p,k} + \\
 & + c9 * \delta_{i,j} * \delta_{l,o} * \delta_{p,m} * \delta_{n,k} + c10 * \delta_{k,l} * \delta_{j,m} * \delta_{n,o} * \delta_{p,i} + c11 * \delta_{k,l} * \delta_{j,o} * \delta_{p,m} * \delta_{n,i} + \\
 & + c12 * \delta_{m,n} * \delta_{j,k} * \delta_{l,o} * \delta_{p,i} + c13 * \delta_{m,n} * \delta_{j,o} * \delta_{p,k} * \delta_{l,i} + c14 * \delta_{o,p} * \delta_{j,k} * \delta_{l,m} * \delta_{n,i} + \\
 & + c15 * \delta_{o,p} * \delta_{j,m} * \delta_{n,k} * \delta_{l,i} + c16 * \delta_{i,l} * \delta_{j,k} * \delta_{m,p} * \delta_{n,o} + c17 * \delta_{i,n} * \delta_{j,m} * \delta_{k,p} * \delta_{l,o} + \\
 & + c18 * \delta_{i,p} * \delta_{j,o} * \delta_{k,n} * \delta_{l,m} + c19 * \delta_{j,k} * \delta_{l,m} * \delta_{n,o} * \delta_{p,i} + c20 * \delta_{j,m} * \delta_{n,o} * \delta_{p,k} * \delta_{l,i} + \\
 & + c21 * \delta_{j,o} * \delta_{p,m} * \delta_{n,k} * \delta_{l,i} + c22 * \delta_{j,o} * \delta_{p,k} * \delta_{l,m} * \delta_{n,i} + c23 * \delta_{j,k} * \delta_{l,o} * \delta_{p,m} * \delta_{n,i} + \\
 & + c24 * \delta_{j,m} * \delta_{n,k} * \delta_{l,o} * \delta_{p,i};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{dagger_s} = \{ & U_{dagger_{i,j}}, U_{dagger_{k,l}}, U_{dagger_{m,n}}, U_{dagger_{o,p}} \} \rightarrow \\
 & c1dagger * \delta_{i,j} * \delta_{k,l} * \delta_{m,n} * \delta_{o,p} + c2dagger * \delta_{i,j} * \delta_{k,l} * \delta_{m,p} * \delta_{n,o} + \\
 & c3dagger * \delta_{i,j} * \delta_{m,n} * \delta_{k,p} * \delta_{l,o} + c4dagger * \delta_{i,j} * \delta_{o,p} * \delta_{k,n} * \delta_{l,m} + \\
 & c5dagger * \delta_{k,l} * \delta_{m,n} * \delta_{i,p} * \delta_{j,o} + c6dagger * \delta_{k,l} * \delta_{o,p} * \delta_{i,n} * \delta_{j,m} + \\
 & c7dagger * \delta_{m,n} * \delta_{o,p} * \delta_{i,l} * \delta_{j,k} + c8dagger * \delta_{i,j} * \delta_{l,m} * \delta_{n,o} * \delta_{p,k} + \\
 & c9dagger * \delta_{i,j} * \delta_{l,o} * \delta_{p,m} * \delta_{n,k} + c10dagger * \delta_{k,l} * \delta_{j,m} * \delta_{n,o} * \delta_{p,i} + \\
 & c11dagger * \delta_{k,l} * \delta_{j,o} * \delta_{p,m} * \delta_{n,i} + c12dagger * \delta_{m,n} * \delta_{j,k} * \delta_{l,o} * \delta_{p,i} + \\
 & c13dagger * \delta_{m,n} * \delta_{j,o} * \delta_{p,k} * \delta_{l,i} + c14dagger * \delta_{o,p} * \delta_{j,k} * \delta_{l,m} * \delta_{n,i} + \\
 & c15dagger * \delta_{o,p} * \delta_{j,m} * \delta_{n,k} * \delta_{l,i} + c16dagger * \delta_{i,l} * \delta_{j,k} * \delta_{m,p} * \delta_{n,o} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{c17dagger} * \delta_{i,n} * \delta_{j,m} * \delta_{k,p} * \delta_{l,o} + \mathbf{c18dagger} * \delta_{i,p} * \delta_{j,o} * \delta_{k,n} * \delta_{l,m} + \\
 & \mathbf{c19dagger} * \delta_{j,k} * \delta_{l,m} * \delta_{n,o} * \delta_{p,i} + \mathbf{c20dagger} * \delta_{j,m} * \delta_{n,o} * \delta_{p,k} * \delta_{l,i} + \\
 & \mathbf{c21dagger} * \delta_{j,o} * \delta_{p,m} * \delta_{n,k} * \delta_{l,i} + \mathbf{c22dagger} * \delta_{j,o} * \delta_{p,k} * \delta_{l,m} * \delta_{n,i} + \\
 & \mathbf{c23dagger} * \delta_{j,k} * \delta_{l,o} * \delta_{p,m} * \delta_{n,i} + \mathbf{c24dagger} * \delta_{j,m} * \delta_{n,k} * \delta_{l,o} * \delta_{p,i};
 \end{aligned}$$

Als nächstes werden die Gruppenintegrale über alle möglichen Kombinationen der Spuren der Nullmodenfelder definiert.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A1} &= \frac{8*N}{\mu^4} (\nu - \text{Abs}[\nu]) (1 + N\nu) (2 + N\nu) (3 + N\nu); \\
 \mathbf{A2} &= \frac{8*N}{\mu^4} (\nu - \text{Abs}[\nu]) (N + \nu) (2 + N\nu) (3 + N\nu); \\
 \mathbf{A3} &= \frac{8*N}{\mu^4} (\nu - \text{Abs}[\nu]) (1 + N^2 + 3N\nu + \nu^2); \\
 \mathbf{A4} &= \frac{8*N}{\mu^4} (\nu - \text{Abs}[\nu]) (2 + N^3\nu + 4\nu^2 + 2N^2(2 + \nu^2) + N\nu(10 + \nu^2)); \\
 \mathbf{A5} &= \frac{8*N}{\mu^4} (\nu - \text{Abs}[\nu]) (5 + N^2 + 5N\nu + \nu^2); \\
 \mathbf{A1dagger} &= \frac{8*N}{\mu^4} (-\nu - \text{Abs}[\nu]) (1 - N\nu) (2 - N\nu) (3 - N\nu); \\
 \mathbf{A2dagger} &= \frac{8*N}{\mu^4} (-\nu - \text{Abs}[\nu]) (N - \nu) (2 - N\nu) (3 - N\nu); \\
 \mathbf{A3dagger} &= \frac{8*N}{\mu^4} (-\nu - \text{Abs}[\nu]) (1 + N^2 - 3N\nu + \nu^2); \\
 \mathbf{A4dagger} &= \frac{8*N}{\mu^4} (-\nu - \text{Abs}[\nu]) (2 - N^3\nu + 4\nu^2 + 2N^2(2 + \nu^2) + N\nu(-10 + \nu^2)); \\
 \mathbf{A5dagger} &= \frac{8*N}{\mu^4} (-\nu - \text{Abs}[\nu]) (5 + N^2 - 5N\nu + \nu^2);
 \end{aligned}$$

Die Abkürzungen sind wie folgt:

$$A1 = \langle \text{Tr}[U^4] \rangle, \quad A2 = \langle \text{Tr}[U^2] \text{Tr}[U]^2 \rangle, \quad (\text{E.2})$$

$$A3 = \langle \text{Tr}[U^3] \text{Tr}[U] \rangle, \quad A4 = \langle \text{Tr}[U^2]^2 \rangle, \quad (\text{E.3})$$

$$A5 = \langle \text{Tr}[U^4] \rangle. \quad (\text{E.4})$$

A1dagger-A5dagger sind die komplex-konjugierten Gruppenintegrale zu A1-A5.

Als nächstes werden die Kontraktionen der Deltas definiert.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Kron} &= \delta_{a,b} * Q_{-c,b} \rightarrow Q_{c,a}; \\
 \mathbf{Kron1} &= \delta_{b,a} * Q_{-c,b} \rightarrow Q_{c,a}; \\
 \mathbf{Kron2} &= \delta_{a,b} * Q_{-b,c} \rightarrow Q_{a,c}; \\
 \mathbf{Kron3} &= \delta_{b,a} * Q_{-b,c} \rightarrow Q_{a,c}; \\
 \mathbf{Kron4} &= \delta_{b,a} * Q_{-a,b} \rightarrow Q_{a,a}; \\
 \mathbf{Kron5} &= \delta_{b,a} * Q_{-b,a} \rightarrow Q_{a,a};
 \end{aligned}$$

Mit dieser Vorarbeit können die notwendigen Konstanten c1-c24 und c1dagger-c24dagger berechnet werden. Dazu wird ein Gleichungssystem mit allen möglichen Kombinationen aus Integralen über Spuren aufgestellt. An dieser Stelle ist es wichtig, jeweils vier U in einem Vektor zusammenzufassen und nicht nur zu multiplizieren, da die Reihenfolge, wie die U in Deltas umgeschrieben werden, wichtig ist. Die Konstanten werden dann in den Variablen Ersetzen1 und Ersetzen2 gespeichert.

Solve[

```
{A1 == {Ui,i, Uj,j, Uk,k, Ul,l}, A2 == {Ui,i, Uj,j, Um,n, Un,m},
A2 == {Ui,i, Um,n, Un,m, Uj,j}, A2 == {Um,n, Un,m, Ui,i, Uj,j},
A2 == {Um,n, Ui,i, Uj,j, Un,m}, A2 == {Ui,i, Um,n, Uj,j, Un,m},
A2 == {Um,n, Ui,i, Un,m, Uj,j}, A3 == {Ui,i, Um,n, Un,o, Uo,m},
A3 == {Ui,i, Um,n, Uo,m, Un,o}, A3 == {Um,n, Ui,i, Un,o, Uo,m},
A3 == {Um,n, Ui,i, Uo,m, Un,o}, A3 == {Un,o, Um,n, Ui,i, Uo,m},
A3 == {Un,o, Uo,m, Ui,i, Um,n}, A3 == {Uo,m, Um,n, Un,o, Ui,i},
A3 == {Uo,m, Un,o, Um,n, Ui,i}, A4 == {Ui,j, Uj,i, Um,n, Un,m},
A4 == {Un,m, Ui,j, Uj,i, Um,n}, A4 == {Ui,j, Um,n, Uj,i, Un,m},
A5 == {Ui,j, Uj,m, Um,n, Un,i}, A5 == {Ui,j, Uj,m, Un,i, Um,n},
A5 == {Ui,j, Um,n, Uj,m, Un,i}, A5 == {Uj,m, Ui,j, Um,n, Un,i},
A5 == {Un,i, Um,n, Uj,m, Ui,j}, A5 == {Un,i, Uj,m, Um,n, Ui,j}} // .Us // .Kron
// .Kron1 // .Kron2 // .Kron3 // .Kron4 // .Kron5 // .δb,-b → N // .δb,-a2 → N,
{c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9, c10, c11, c12, c13, c14, c15, c16, c17, c18, c19, c20, c21, c22, c23, c24}];
% // Simplify;
```

Ersetzen1 = % // FullSimplify

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} c1 &\rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(48 - 2N(75 + N(-83 + N(15 + N))) + \\ &+ 2N(159 + N(-75 + 46N - 8N^3))\nu + 2(24 + N(-15 + 110N - 24N^3))\nu^2 + \\ &+ N(18 + 33N^2 - 14N^4 + N^6)\nu^3)(-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ c2 &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(8 - 2N(-25 + N(17 + (-5 + N)N)) + \\ &+ 2N(-11 + N(25 + 2N(-7 + N^2)))\nu + (-28 + N(10 + 9N - 2N^3 + N^5))\nu^2 + \\ &+ 2N(-3 + 2N^2)\nu^3)(-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ c3 &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(8 - 2N(-25 + N(17 + (-5 + N)N)) + \\ &+ 2N(-11 + N(25 + 2N(-7 + N^2)))\nu + (-28 + N(10 + 9N - 2N^3 + N^5))\nu^2 + \\ &+ 2N(-3 + 2N^2)\nu^3)(-\nu + \text{Abs}[\nu]), \end{aligned} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c4} &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(8-2N(-25+N(17+(-5+N)N)))+ \\
 &\quad +2N(-11+N(25+2N(-7+N^2)))\nu+(-28+N(10+9N-2N^3+N^5))\nu^2+ \\
 &\quad +2N(-3+2N^2)\nu^3(-\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c5} &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(8-2N(-25+N(17+(-5+N)N)))+ \\
 &\quad +2N(-11+N(25+2N(-7+N^2)))\nu+(-28+N(10+9N-2N^3+N^5))\nu^2+ \\
 &\quad +2N(-3+2N^2)\nu^3(-\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c6} &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(8-2N(-25+N(17+(-5+N)N)))+ \\
 &\quad +2N(-11+N(25+2N(-7+N^2)))\nu+(-28+N(10+9N-2N^3+N^5))\nu^2+ \\
 &\quad +2N(-3+2N^2)\nu^3(-\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c7} &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(8-2N(-25+N(17+(-5+N)N)))+ \\
 &\quad +2N(-11+N(25+2N(-7+N^2)))\nu+(-28+N(10+9N-2N^3+N^5))\nu^2+ \\
 &\quad +2N(-3+2N^2)\nu^3(-\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c8} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^4(-10+(15-7\nu)\nu)+24(1+\nu^2)+N^6(-1+3\nu^2)+ \\
 &\quad +N^5(3+6\nu+\nu^3)+N^3(18+\nu(-49+3\nu))+3N^2(5+\nu(5+8\nu))+ \\
 &\quad +3N(5+\nu(35+\nu+3\nu^2)))(-\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c9} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^4(-10+(15-7\nu)\nu)+24(1+\nu^2)+N^6(-1+3\nu^2)+ \\
 &\quad +N^5(3+6\nu+\nu^3)+N^3(18+\nu(-49+3\nu))+3N^2(5+\nu(5+8\nu))+ \\
 &\quad +3N(5+\nu(35+\nu+3\nu^2)))(-\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c10} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^4(-10+(15-7\nu)\nu)+24(1+\nu^2)+N^6(-1+3\nu^2)+ \\
 &\quad +N^5(3+6\nu+\nu^3)+N^3(18+\nu(-49+3\nu))+3N^2(5+\nu(5+8\nu))+ \\
 &\quad +3N(5+\nu(35+\nu+3\nu^2)))(-\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c11} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^4(-10+(15-7\nu)\nu)+24(1+\nu^2)+N^6(-1+3\nu^2)+ \\
 &\quad +N^5(3+6\nu+\nu^3)+N^3(18+\nu(-49+3\nu))+3N^2(5+\nu(5+8\nu))+ \\
 &\quad +3N(5+\nu(35+\nu+3\nu^2)))(-\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c12} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^4(-10+(15-7\nu)\nu)+24(1+\nu^2)+N^6(-1+3\nu^2)+ \\
 &\quad +N^5(3+6\nu+\nu^3)+N^3(18+\nu(-49+3\nu))+3N^2(5+\nu(5+8\nu))+ \\
 &\quad +3N(5+\nu(35+\nu+3\nu^2)))(-\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c13} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^4(-10+(15-7\nu)\nu)+24(1+\nu^2)+N^6(-1+3\nu^2)+ \\
 &\quad +N^5(3+6\nu+\nu^3)+N^3(18+\nu(-49+3\nu))+3N^2(5+\nu(5+8\nu))+ \\
 &\quad +3N(5+\nu(35+\nu+3\nu^2)))(-\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c14} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^4(-10+(15-7\nu)\nu)+24(1+\nu^2)+N^6(-1+3\nu^2)+ \\
 &\quad +N^5(3+6\nu+\nu^3)+N^3(18+\nu(-49+3\nu))+3N^2(5+\nu(5+8\nu))+ \\
 &\quad +3N(5+\nu(35+\nu+3\nu^2)))(-\nu+\text{Abs}[\nu]),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c15} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (N^4(-10 + (15 - 7\nu)\nu) + 24 (1 + \nu^2) + N^6 (-1 + 3\nu^2) + \\
 &\quad + N^5 (3 + 6\nu + \nu^3) + N^3(18 + \nu(-49 + 3\nu)) + 3N^2(5 + \nu(5 + 8\nu)) + \\
 &\quad + 3N (5 + \nu (35 + \nu + 3\nu^2))) (-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c16} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (-4N^6 - N^7\nu + N^5(4 + 6\nu) - 48 (1 + \nu^2) - \\
 &\quad - 2N^2(-7 + \nu(15 + 2\nu)) + 2N^4(9 + 2\nu(5 + 6\nu)) - 6N (5 + \nu (17 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N^3(14 + \nu(55 + 4\nu(1 + 3\nu)))) (-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c17} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (-4N^6 - N^7\nu + N^5(4 + 6\nu) - 48 (1 + \nu^2) - \\
 &\quad - 2N^2(-7 + \nu(15 + 2\nu)) + 2N^4(9 + 2\nu(5 + 6\nu)) - 6N (5 + \nu (17 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N^3(14 + \nu(55 + 4\nu(1 + 3\nu)))) (-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c18} &\rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (-4N^6 - N^7\nu + N^5(4 + 6\nu) - 48 (1 + \nu^2) - \\
 &\quad - 2N^2(-7 + \nu(15 + 2\nu)) + 2N^4(9 + 2\nu(5 + 6\nu)) - 6N (5 + \nu (17 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N^3(14 + \nu(55 + 4\nu(1 + 3\nu)))) (-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c19} &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (-28 + N^5(1 - 2\nu) + 8\nu^2 + N^4(-12 + \nu(5 + 6\nu)) + \\
 &\quad + N^2(60 + \nu(5 + 14\nu)) + N^3 (6 + \nu (21 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N (5 + \nu (23 + \nu + 3\nu^2))) (-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c20} &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (-28 + N^5(1 - 2\nu) + 8\nu^2 + N^4(-12 + \nu(5 + 6\nu)) + \\
 &\quad + N^2(60 + \nu(5 + 14\nu)) + N^3 (6 + \nu (21 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N (5 + \nu (23 + \nu + 3\nu^2))) (-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c21} &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (-28 + N^5(1 - 2\nu) + 8\nu^2 + N^4(-12 + \nu(5 + 6\nu)) + \\
 &\quad + N^2(60 + \nu(5 + 14\nu)) + N^3 (6 + \nu (21 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N (5 + \nu (23 + \nu + 3\nu^2))) (-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c22} &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (-28 + N^5(1 - 2\nu) + 8\nu^2 + N^4(-12 + \nu(5 + 6\nu)) + \\
 &\quad + N^2(60 + \nu(5 + 14\nu)) + N^3 (6 + \nu (21 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N (5 + \nu (23 + \nu + 3\nu^2))) (-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c23} &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (-28 + N^5(1 - 2\nu) + 8\nu^2 + N^4(-12 + \nu(5 + 6\nu)) + \\
 &\quad + N^2(60 + \nu(5 + 14\nu)) + N^3 (6 + \nu (21 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N (5 + \nu (23 + \nu + 3\nu^2))) (-\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c24} &\rightarrow -\frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (-28 + N^5(1 - 2\nu) + 8\nu^2 + N^4(-12 + \nu(5 + 6\nu)) + \\
 &\quad + N^2(60 + \nu(5 + 14\nu)) + N^3 (6 + \nu (21 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N (5 + \nu (23 + \nu + 3\nu^2))) (-\nu + \text{Abs}[\nu]) \} \}
 \end{aligned}$$

```

Solve[
{A1dagger == {Udaggeri,i, Udaggerj,j, Udaggerk,k, Udaggerl,l},
A2dagger == {Udaggeri,i, Udaggerj,j, Udaggerm,n, Udaggern,m},
A2dagger == {Udaggeri,i, Udaggerm,n, Udaggern,m, Udaggerj,j},
A2dagger == {Udaggerm,n, Udaggern,m, Udaggeri,i, Udaggerj,j},
A2dagger == {Udaggerm,n, Udaggeri,i, Udaggerj,j, Udaggern,m},
A2dagger == {Udaggeri,i, Udaggerm,n, Udaggerj,j, Udaggern,m},
A2dagger == {Udaggerm,n, Udaggeri,i, Udaggern,m, Udaggerj,j},
A3dagger == {Udaggeri,i, Udaggerm,n, Udaggern,o, Udaggero,m},
A3dagger == {Udaggeri,i, Udaggerm,n, Udaggero,m, Udaggern,o},
A3dagger == {Udaggerm,n, Udaggeri,i, Udaggern,o, Udaggero,m},
A3dagger == {Udaggerm,n, Udaggeri,i, Udaggero,m, Udaggern,o},
A3dagger == {Udaggern,o, Udaggerm,n, Udaggeri,i, Udaggero,m},
A3dagger == {Udaggern,o, Udaggero,m, Udaggeri,i, Udaggerm,n},
A3dagger == {Udaggero,m, Udaggerm,n, Udaggern,o, Udaggeri,i},
A3dagger == {Udaggero,m, Udaggern,o, Udaggerm,n, Udaggeri,i},
A4dagger == {Udaggeri,j, Udaggerj,i, Udaggerm,n, Udaggern,m},
A4dagger == {Udaggern,m, Udaggeri,j, Udaggerj,i, Udaggerm,n},
A4dagger == {Udaggeri,j, Udaggerm,n, Udaggerj,i, Udaggern,m},
A5dagger == {Udaggeri,j, Udaggerj,m, Udaggerm,n, Udaggern,i},
A5dagger == {Udaggeri,j, Udaggerj,m, Udaggern,i, Udaggerm,n},
A5dagger == {Udaggeri,j, Udaggerm,n, Udaggerj,m, Udaggern,i},
A5dagger == {Udaggerj,m, Udaggeri,j, Udaggerm,n, Udaggern,i},
A5dagger == {Udaggern,i, Udaggerm,n, Udaggerj,m, Udaggeri,j},
A5dagger == {Udaggern,i, Udaggerj,m, Udaggerm,n, Udaggeri,j}} /.Udaggers
//.Kron//.Kron1//.Kron2//.Kron3//.Kron4//.Kron5//.δb-,b- → N//.δb-,a-2 → N,
{c1dagger, c2dagger, c3dagger, c4dagger, c5dagger, c6dagger, c7dagger, c8dagger, c9dagger,
c10dagger, c11dagger, c12dagger, c13dagger, c14dagger, c15dagger, c16dagger, c17dagger,
c18dagger, c19dagger, c20dagger, c21dagger, c22dagger, c23dagger, c24dagger}];

```

**%//Simplify;**

**Ersetzen2 = %//FullSimplify**

$$\left\{ \left\{ \begin{array}{l} \text{c1dagger} \rightarrow \frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(-48 + 2N(75 + N(-83 + N(15 + N))) + \\ + 2N(159 + N(-75 + 46N - 8N^3))\nu + 2(-24 + N(15 - 110N + 24N^3))\nu^2 + \\ + N(-18 + 27N^2 - 14N^4 + N^6)\nu^3)(\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ \text{c2dagger} \rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(-8 + 2N(-25 + N(17 + (-5 + N)N)) + \\ + 2N(-11 + N(25 + 2N(-7 + N^2)))\nu - (-28 + N(10 + 9N - 2N^3 + N^5))\nu^2 + \\ + 6N(1 + N^2)\nu^3)(\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ \text{c3dagger} \rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(-8 + 2N(-25 + N(17 + (-5 + N)N)) + \\ + 2N(-11 + N(25 + 2N(-7 + N^2)))\nu - (-28 + N(10 + 9N - 2N^3 + N^5))\nu^2 + \\ + 6N(1 + N^2)\nu^3)(\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ \text{c4dagger} \rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(-8 + 2N(-25 + N(17 + (-5 + N)N)) + \\ + 2N(-11 + N(25 + 2N(-7 + N^2)))\nu - (-28 + N(10 + 9N - 2N^3 + N^5))\nu^2 + \\ + 6N(1 + N^2)\nu^3)(\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ \text{c5dagger} \rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(-8 + 2N(-25 + N(17 + (-5 + N)N)) + \\ + 2N(-11 + N(25 + 2N(-7 + N^2)))\nu - (-28 + N(10 + 9N - 2N^3 + N^5))\nu^2 + \\ + 6N(1 + N^2)\nu^3)(\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ \text{c6dagger} \rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(-8 + 2N(-25 + N(17 + (-5 + N)N)) + \\ + 2N(-11 + N(25 + 2N(-7 + N^2)))\nu - (-28 + N(10 + 9N - 2N^3 + N^5))\nu^2 + \\ + 6N(1 + N^2)\nu^3)(\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ \text{c7dagger} \rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(-8 + 2N(-25 + N(17 + (-5 + N)N)) + \\ + 2N(-11 + N(25 + 2N(-7 + N^2)))\nu - (-28 + N(10 + 9N - 2N^3 + N^5))\nu^2 + \\ + 6N(1 + N^2)\nu^3)(\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ \text{c8dagger} \rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(N^6(1 - 3\nu^2) - 24(1 + \nu^2) + N^5(-3 + 6\nu + \nu^3) + \\ + N^4(10 + \nu(15 + 7\nu)) - 3N^2(5 + \nu(-5 + 8\nu)) - 3N(5 + \nu(-35 + \nu + 3\nu^2)) + \\ + N^3(-18 + \nu(-49 + 3\nu(-1 + 4\nu))))(\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ \text{c9dagger} \rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(N^6(1 - 3\nu^2) - 24(1 + \nu^2) + N^5(-3 + 6\nu + \nu^3) + \\ + N^4(10 + \nu(15 + 7\nu)) - 3N^2(5 + \nu(-5 + 8\nu)) - 3N(5 + \nu(-35 + \nu + 3\nu^2)) + \\ + N^3(-18 + \nu(-49 + 3\nu(-1 + 4\nu))))(\nu + \text{Abs}[\nu]), \\ \text{c10dagger} \rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8(N^6(1 - 3\nu^2) - 24(1 + \nu^2) + N^5(-3 + 6\nu + \nu^3) + \\ + N^4(10 + \nu(15 + 7\nu)) - 3N^2(5 + \nu(-5 + 8\nu)) - 3N(5 + \nu(-35 + \nu + 3\nu^2)) + \\ + N^3(-18 + \nu(-49 + 3\nu(-1 + 4\nu))))(\nu + \text{Abs}[\nu]), \end{array} \right. \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c11dagger} &\rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^6(1-3\nu^2)-24(1+\nu^2)+N^5(-3+6\nu+\nu^3)+ \\
 &\quad +N^4(10+\nu(15+7\nu))-3N^2(5+\nu(-5+8\nu))-3N(5+\nu(-35+\nu+3\nu^2))+ \\
 &\quad +N^3(-18+\nu(-49+3\nu(-1+4\nu))))(\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c12dagger} &\rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^6(1-3\nu^2)-24(1+\nu^2)+N^5(-3+6\nu+\nu^3)+ \\
 &\quad +N^4(10+\nu(15+7\nu))-3N^2(5+\nu(-5+8\nu))-3N(5+\nu(-35+\nu+3\nu^2))+ \\
 &\quad +N^3(-18+\nu(-49+3\nu(-1+4\nu))))(\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c13dagger} &\rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^6(1-3\nu^2)-24(1+\nu^2)+N^5(-3+6\nu+\nu^3)+ \\
 &\quad +N^4(10+\nu(15+7\nu))-3N^2(5+\nu(-5+8\nu))-3N(5+\nu(-35+\nu+3\nu^2))+ \\
 &\quad +N^3(-18+\nu(-49+3\nu(-1+4\nu))))(\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c14dagger} &\rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^6(1-3\nu^2)-24(1+\nu^2)+N^5(-3+6\nu+\nu^3)+ \\
 &\quad +N^4(10+\nu(15+7\nu))-3N^2(5+\nu(-5+8\nu))-3N(5+\nu(-35+\nu+3\nu^2))+ \\
 &\quad +N^3(-18+\nu(-49+3\nu(-1+4\nu))))(\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c15dagger} &\rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(N^6(1-3\nu^2)-24(1+\nu^2)+N^5(-3+6\nu+\nu^3)+ \\
 &\quad +N^4(10+\nu(15+7\nu))-3N^2(5+\nu(-5+8\nu))-3N(5+\nu(-35+\nu+3\nu^2))+ \\
 &\quad +N^3(-18+\nu(-49+3\nu(-1+4\nu))))(\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c16dagger} &\rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(4N^6-N^7\nu+N^3(-14+(55-4\nu)\nu)+ \\
 &\quad +48(1+\nu^2)+2N^5(-2+3\nu+\nu^3)+2N^2(-7+\nu(-15+2\nu))-2N^4(9+2\nu(-5+6\nu))+ \\
 &\quad +6N(5+\nu(-17+\nu+3\nu^2)))(\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c17dagger} &\rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(4N^6-N^7\nu+N^3(-14+(55-4\nu)\nu)+ \\
 &\quad +48(1+\nu^2)+2N^5(-2+3\nu+\nu^3)+2N^2(-7+\nu(-15+2\nu))-2N^4(9+2\nu(-5+6\nu))+ \\
 &\quad +6N(5+\nu(-17+\nu+3\nu^2)))(\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c18dagger} &\rightarrow -\frac{1}{N(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(4N^6-N^7\nu+N^3(-14+(55-4\nu)\nu)+ \\
 &\quad +48(1+\nu^2)+2N^5(-2+3\nu+\nu^3)+2N^2(-7+\nu(-15+2\nu))-2N^4(9+2\nu(-5+6\nu))+ \\
 &\quad +6N(5+\nu(-17+\nu+3\nu^2)))(\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c19dagger} &\rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(28-8\nu^2-N^5(1+2\nu)+N^2(-60+(5-14\nu)\nu)+ \\
 &\quad +N^4(12+(5-6\nu)\nu)-N(5+\nu(-23+\nu+3\nu^2))+ \\
 &\quad +N^3(-6+\nu(21+\nu(-1+7\nu))))(\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c20dagger} &\rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(28-8\nu^2-N^5(1+2\nu)+N^2(-60+(5-14\nu)\nu)+ \\
 &\quad +N^4(12+(5-6\nu)\nu)-N(5+\nu(-23+\nu+3\nu^2))+ \\
 &\quad +N^3(-6+\nu(21+\nu(-1+7\nu))))(\nu+\text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c21dagger} &\rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4}8(28-8\nu^2-N^5(1+2\nu)+N^2(-60+(5-14\nu)\nu)+ \\
 &\quad +N^4(12+(5-6\nu)\nu)-N(5+\nu(-23+\nu+3\nu^2))+ \\
 &\quad +N^3(-6+\nu(21+\nu(-1+7\nu))))(\nu+\text{Abs}[\nu]),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c22dagger} &\rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (28 - 8\nu^2 - N^5(1 + 2\nu) + N^2(-60 + (5 - 14\nu)\nu) + \\
 &\quad + N^4(12 + (5 - 6\nu)\nu) - N(5 + \nu(-23 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N^3(-6 + \nu(21 + \nu(-1 + 7\nu)))) (\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c23dagger} &\rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (28 - 8\nu^2 - N^5(1 + 2\nu) + N^2(-60 + (5 - 14\nu)\nu) + \\
 &\quad + N^4(12 + (5 - 6\nu)\nu) - N(5 + \nu(-23 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N^3(-6 + \nu(21 + \nu(-1 + 7\nu)))) (\nu + \text{Abs}[\nu]), \\
 \text{c24dagger} &\rightarrow \frac{1}{(-36+N^2(-7+N^2)^2)\mu^4} 8 (28 - 8\nu^2 - N^5(1 + 2\nu) + N^2(-60 + (5 - 14\nu)\nu) + \\
 &\quad + N^4(12 + (5 - 6\nu)\nu) - N(5 + \nu(-23 + \nu + 3\nu^2)) + \\
 &\quad + N^3(-6 + \nu(21 + \nu(-1 + 7\nu)))) (\nu + \text{Abs}[\nu]) \} \}
 \end{aligned}$$

Als nächstes werden die Kontraktionen der Nicht-Nullmoden-Felder definiert. Wick ersetzt zwei Felder durch die Propagatoren. Hier wurde  $E(x)$  durch  $F(x)$  ersetzt, da Mathematica den Variablennamen  $E$  schon belegt hat.

$$\begin{aligned}
 \text{Wick} &= \xi[\mathbf{xx}]_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \xi[\mathbf{yy}]_{\mathbf{c},\mathbf{d}} \rightarrow \frac{1}{2} (\delta_{\mathbf{a},\mathbf{d}} \delta_{\mathbf{b},\mathbf{c}} G[\mathbf{xx} - \mathbf{yy}] - \delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \delta_{\mathbf{c},\mathbf{d}} F[\mathbf{xx} - \mathbf{yy}]); \\
 \text{Feynman} &= F[\mathbf{xx} - \mathbf{yy}] \rightarrow \frac{1}{N} G[\mathbf{xx} - \mathbf{yy}];
 \end{aligned}$$

Mit dieser Definition werden alle Wickkontraktionen der Felder des jeweiligen Summanden aus E.1 ausgeführt und in Teil1 bzw. Teil2 gespeichert.

$$\begin{aligned}
 \text{Op1} &= \{\xi[s]_{\alpha,\beta}, \xi[s]_{\beta,\gamma}\}; \\
 \text{P1} &= \{\xi[x]_{j,k}\}; \\
 \text{P2} &= \{\xi[y]_{n,o}\}; \\
 \text{Term}[1] &= \{\text{P1} * \text{Op1}[[1]], \text{Op1}[[2]] * \text{P2}\} // \text{Wick}; \\
 \text{Term}[2] &= \{\text{P1} * \text{Op1}[[2]], \text{Op1}[[1]] * \text{P2}\} // \text{Wick}; \\
 \text{Teil1} &= \text{Sum}[\text{Term}[a] [[1]] * \text{Term}[a] [[2]], \{a, 1, 2\}] // \text{Feynman} // \text{Simplify}
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{4N^2} G[s-x] G[s-y] (\delta_{j,k} (2\delta_{n,o} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{\beta,\gamma} - N (\delta_{\alpha,o} \delta_{\beta,n} \delta_{\beta,\gamma} + \delta_{\alpha,\beta} \delta_{\beta,o} \delta_{\gamma,n})) + N (-\delta_{n,o} (\delta_{\alpha,k} \delta_{\beta,j} \delta_{\beta,\gamma} + \delta_{\alpha,\beta} \delta_{\beta,k} \delta_{\gamma,j}) + N (\delta_{\alpha,o} \delta_{\beta,k} \delta_{\beta,n} \delta_{\gamma,j} + \delta_{\alpha,k} \delta_{\beta,j} \delta_{\beta,o} \delta_{\gamma,n}))) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Op1} &= \{\xi[s]_{\alpha,\beta}, \xi[s]_{\beta,\gamma}\}; \\
 \text{P1} &= \{\xi[x]_{k,i}\}; \\
 \text{P2} &= \{\xi[y]_{o,m}\}; \\
 \text{Term}[1] &= \{\text{P1} * \text{Op1}[[1]], \text{Op1}[[2]] * \text{P2}\} // \text{Wick}; \\
 \text{Term}[2] &= \{\text{P1} * \text{Op1}[[2]], \text{Op1}[[1]] * \text{P2}\} // \text{Wick};
 \end{aligned}$$

**Teil2 = Sum[Term[a][[1]] \* Term[a][[2]], {a, 1, 2}]//.Feynman//Simplify**

$$\left\{ \frac{1}{4N^2} G[s-x]G[s-y] (\delta_{k,i} (2\delta_{o,m}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\beta,\gamma} - N (\delta_{\alpha,m}\delta_{\beta,o}\delta_{\beta,\gamma} + \delta_{\alpha,\beta}\delta_{\beta,m}\delta_{\gamma,o})) + N (-\delta_{o,m} (\delta_{\alpha,i}\delta_{\beta,k}\delta_{\beta,\gamma} + \delta_{\alpha,\beta}\delta_{\beta,i}\delta_{\gamma,k}) + N (\delta_{\alpha,m}\delta_{\beta,i}\delta_{\beta,o}\delta_{\gamma,k} + \delta_{\alpha,i}\delta_{\beta,k}\delta_{\beta,m}\delta_{\gamma,o}))) \right\}$$

In A und B werden jeweils die vier Nullmodenfelder gespeichert, nachdem sie durch die Konstanten und Deltas ersetzt worden sind. Schon hier wird  $\delta_{ds}$  null gesetzt.

$$A = \{U_{d,s}, U_{k,i}, U_{o,m}, U_{\gamma,\alpha}\} // .Us // .Kron // .Kron1 // .Kron2 // .Kron3 // .Kron4 // .Kron5 // .\delta_{d,s} \rightarrow 0$$

$$B = \{Udagger_{d,s}, Udagger_{j,k}, Udagger_{n,o}, Udagger_{\gamma,\alpha}\} // .Udaggers // .Us // .Kron // .Kron1 // .Kron2 // .Kron3 // .Kron4 // .Kron5 // .\delta_{d,s} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} & c16\delta_{d,i}\delta_{m,\gamma}\delta_{o,\alpha}\delta_{s,k} + c17\delta_{d,m}\delta_{i,\gamma}\delta_{k,\alpha}\delta_{s,o} + c18\delta_{d,\alpha}\delta_{i,o}\delta_{k,m}\delta_{s,\gamma} + c5\delta_{d,\alpha}\delta_{k,i}\delta_{o,m}\delta_{s,\gamma} + \\ & c19\delta_{i,o}\delta_{m,\gamma}\delta_{s,k}\delta_{\alpha,d} + c12\delta_{i,\gamma}\delta_{o,m}\delta_{s,k}\delta_{\alpha,d} + c24\delta_{i,\gamma}\delta_{m,k}\delta_{s,o}\delta_{\alpha,d} + c10\delta_{k,i}\delta_{m,\gamma}\delta_{s,o}\delta_{\alpha,d} + \\ & c20\delta_{i,d}\delta_{m,\gamma}\delta_{s,o}\delta_{\alpha,k} + c22\delta_{i,o}\delta_{m,d}\delta_{s,\gamma}\delta_{\alpha,k} + c13\delta_{i,d}\delta_{o,m}\delta_{s,\gamma}\delta_{\alpha,k} + c23\delta_{i,\gamma}\delta_{m,d}\delta_{s,k}\delta_{\alpha,o} + \\ & c11\delta_{k,i}\delta_{m,d}\delta_{s,\gamma}\delta_{\alpha,o} + c21\delta_{i,d}\delta_{m,k}\delta_{s,\gamma}\delta_{\alpha,o} + c14\delta_{i,o}\delta_{m,d}\delta_{s,k}\delta_{\gamma,\alpha} + c7\delta_{d,i}\delta_{o,m}\delta_{s,k}\delta_{\gamma,\alpha} + \\ & c6\delta_{d,m}\delta_{k,i}\delta_{s,o}\delta_{\gamma,\alpha} + c15\delta_{i,d}\delta_{m,k}\delta_{s,o}\delta_{\gamma,\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c16dagger\delta_{d,k}\delta_{n,\alpha}\delta_{o,\gamma}\delta_{s,j} + c17dagger\delta_{d,o}\delta_{j,\alpha}\delta_{k,\gamma}\delta_{s,n} + c18dagger\delta_{d,\alpha}\delta_{j,o}\delta_{k,n}\delta_{s,\gamma} + \\ & c5dagger\delta_{d,\alpha}\delta_{j,k}\delta_{n,o}\delta_{s,\gamma} + c12dagger\delta_{k,\gamma}\delta_{n,o}\delta_{s,j}\delta_{\alpha,d} + c19dagger\delta_{k,n}\delta_{o,\gamma}\delta_{s,j}\delta_{\alpha,d} + \\ & c24dagger\delta_{k,\gamma}\delta_{o,j}\delta_{s,n}\delta_{\alpha,d} + c10dagger\delta_{j,k}\delta_{o,\gamma}\delta_{s,n}\delta_{\alpha,d} + c20dagger\delta_{k,d}\delta_{o,\gamma}\delta_{s,n}\delta_{\alpha,j} + \\ & c13dagger\delta_{k,d}\delta_{n,o}\delta_{s,\gamma}\delta_{\alpha,j} + c22dagger\delta_{k,n}\delta_{o,d}\delta_{s,\gamma}\delta_{\alpha,j} + c23dagger\delta_{k,\gamma}\delta_{o,d}\delta_{s,j}\delta_{\alpha,n} + \\ & c11dagger\delta_{j,k}\delta_{o,d}\delta_{s,\gamma}\delta_{\alpha,n} + c21dagger\delta_{k,d}\delta_{o,j}\delta_{s,\gamma}\delta_{\alpha,n} + c7dagger\delta_{d,k}\delta_{n,o}\delta_{s,j}\delta_{\gamma,\alpha} + \\ & c14dagger\delta_{k,n}\delta_{o,d}\delta_{s,j}\delta_{\gamma,\alpha} + c6dagger\delta_{d,o}\delta_{j,k}\delta_{s,n}\delta_{\gamma,\alpha} + c15dagger\delta_{k,d}\delta_{o,j}\delta_{s,n}\delta_{\gamma,\alpha} \end{aligned}$$

Zu guter Letzt wird alles ausmultipliziert und alle Deltas angewendet. Außerdem werden noch die Konstanten ersetzt und N wird 3 gesetzt.

$$(T^a)_{i,j} * (T^b)_{m,n} * (\text{Teil1} * A + \text{Teil2} * B) // \text{Expand};$$

$$\text{VorProjektion} = \% // .Kron // .Kron1 // .Kron2 // .Kron3 // .Kron4 // .Kron5$$

$$// .(T^b)_{m,m} \rightarrow 0 // .\delta_{d,s} \rightarrow 0 // .\delta_{s,d} \rightarrow 0 // .\delta_{\beta,-\beta} \rightarrow N // .\delta_{\alpha,-\alpha}^2 \rightarrow N // \text{FullSimplify};$$

$$\text{VorProjektion1} = \text{VorProjektion} // .Ersetzen1 // .Ersetzen2 // \text{Simplify}$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ \frac{1}{N^2(4-5N^2+N^4)\mu^4} 4 (N\nu^2 (-40 - 40N^3 + N^6 - 10N^2\nu^2 + N^4 (7 - 2\nu^2)) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (-24 - 5N^6 + 2N^2 (31 + 8\nu^2) + N^4 (-21 + 11\nu^2) + N^3 (40 + 8\nu^2 - 4\nu^3) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - N^5 (-8 + \nu^3) \right) \text{Abs}[\nu] \right\} G[s-x]G[s-y] \left( (T^a)_{i,s} (T^b)_{d,i} + (T^a)_{d,m} (T^b)_{m,s} \right) \right\} \right\}$$

**%//.N → 3//FullSimplify**

$$\left\{ \left\{ \left\{ -\frac{1}{30\mu^4} (4\nu^2 (-44 + 63\nu^2) + (596 + 3\nu^2(-139 + 39\nu)) \text{Abs}[\nu]) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times G[s-x]G[s-y] \left( (T^a)_{i,s} (T^b)_{d,i} + (T^a)_{d,m} (T^b)_{m,s} \right) \right\} \right\} \right\}$$

Das Endresultat ist in Kapitel 4, Gleichung 4.39 zusammengefasst.

## Literaturverzeichnis

- [1] Claude W. Bernard, Terrence Draper, A. Soni, H. David Politzer, and Mark B. Wise. Application of Chiral Perturbation Theory to  $K \rightarrow 2 \pi$  Decays. Phys. Rev., D32:2343–2347, 1985.
- [2] F. Bernardoni and P. Hernandez. Finite-size scaling for the left-current correlator with non-degenerate quark masses. JHEP, 10:033, 2007.
- [3] P. H. Damgaard, M. C. Diamantini, P. Hernandez, and K. Jansen. Finite-size scaling of meson propagators. Nucl. Phys., B629:445–478, 2002.
- [4] K. E. Eriksson, N. Svartholm, and B. S. Skagerstam. ON INVARIANT GROUP INTEGRALS IN LATTICE QCD. J. Math. Phys., 22:2276, 1981.
- [5] J. Gasser and H. Leutwyler. Thermodynamics of Chiral Symmetry. Phys. Lett., B188:477, 1987.
- [6] Murray Gell-Mann and M Levy. The axial vector current in beta decay. Nuovo Cim., 16:705, 1960.
- [7] Frederick J. Gilman and Mark B. Wise. Effective Hamiltonian for  $\Delta S = 1$  Weak Nonleptonic Decays in the Six Quark Model. Phys. Rev., D20:2392, 1979.
- [8] L. Giusti, P. Hernandez, M. Laine, P. Weisz, and H. Wittig. A strategy to study the role of the charm quark in explaining the  $\Delta I = 1/2$  rule. JHEP, 11:016, 2004.
- [9] L. Giusti, P. Hernandez, M. Laine, P. Weisz, and H. Wittig. Low-energy couplings of QCD from topological zero-mode wave functions. JHEP, 01:003, 2004.
- [10] F. C. Hansen.  $SU(N)$  Haar measure integrals in the nonlinear sigma model. BUTP-90-42-BERN.

- 
- [11] F. C. Hansen. FINITE SIZE EFFECTS IN SPONTANEOUSLY BROKEN  $SU(N) \times SU(N)$  THEORIES. Nucl. Phys., B345:685–708, 1990.
- [12] P. Hasenfratz and H. Leutwyler. GOLDSTONE BOSON RELATED FINITE SIZE EFFECTS IN FIELD THEORY AND CRITICAL PHENOMENA WITH  $O(N)$  SYMMETRY. Nucl. Phys., B343:241–284, 1990.
- [13] Peter Hasenfratz, Victor Laliena, and Ferenc Niedermayer. The index theorem in QCD with a finite cut-off. Phys. Lett., B427:125–131, 1998.
- [14] P. Hernandez et al. Determination of the  $\Delta S = 1$  weak Hamiltonian in the  $SU(4)$  chiral limit through topological zero-mode wave functions. arXiv, 0802.3591, 2008.
- [15] P. Hernandez and M. Laine. Correlators of left charges and weak operators in finite volume chiral perturbation theory. JHEP, 01:063, 2003.
- [16] P. Hernandez and M. Laine. Charm mass dependence of the weak Hamiltonian in chiral perturbation theory. JHEP, 09:018, 2004.
- [17] P. Hernandez and M. Laine. Probing the chiral weak Hamiltonian at finite volumes. JHEP, 10:069, 2006.
- [18] Pilar Hernandez, Karl Jansen, and Martin Luscher. Locality properties of Neuberger’s lattice Dirac operator. Nucl. Phys., B552:363–378, 1999.
- [19] B. L. Ioffe. Axial anomaly: The modern status. Int. J. Mod. Phys., A21:6249–6266, 2006.
- [20] A. D. Jackson, M. K. Sener, and J. J. M. Verbaarschot. Finite volume partition functions and Itzykson-Zuber integrals. Phys. Lett., B387:355–360, 1996.
- [21] H. Leutwyler and A. Smilga. Spectrum of Dirac operator and role of winding number in QCD. Phys. Rev., D46:5607–5632, 1992.
- [22] L. Maiani and M. Testa. Final state interactions from Euclidean correlation functions. Phys. Lett., B245:585–590, 1990.
- [23] Silvia Necco. Determining QCD Low-Energy Couplings from lattice simulations. PoS, LATTICE2007:021, 2006.
- [24] Herbert Neuberger. Exactly massless quarks on the lattice. Phys. Lett., B417:141–144, 1998.

- [25] Herbert Neuberger. More about exactly massless quarks on the lattice. Phys. Lett., B427:353–355, 1998.
- [26] Holger Bech Nielsen and M. Ninomiya. No Go Theorem for Regularizing Chiral Fermions. Phys. Lett., B105:219, 1981.
- [27] Stefan Scherer. Effektive Feldtheorie I und II. <http://www.kph.uni-mainz.de/T/members/scherer/lecture/EFTI&II.pdf>, 2006.
- [28] Thomas Tilli. Die Berechnung von Korrelationsfunktionen für  $\Delta S = 1$ -Übergänge aus Nullmoden des Dirac-Operators. Diplomarbeit Universität Mainz, 2008.
- [29] C. Vafa and Edward Witten. Restrictions on Symmetry Breaking in Vector-Like Gauge Theories. Nucl. Phys., B234:173, 1984.
- [30] H. Wittig. QCD on the lattice, in: Handbook of Particle Physics (Hrsg. H. Schopper). Springer Verlag, im Druck.

# Danksagung

Ich möchte allen herzlich danken, die zu dem Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Folgenden Personen möchte ich besonders hervorheben:

- meinen Betreuer Professor Hartmut Wittig, der mich jederzeit in allem unterstützt hat und mir stets kompetent zur Seite stand;
- Frau Professorin Pilar Hernandez für ihre technische Unterstützung und ihre hilfreichen Tipps;
- meine Lebensgefährtin Heike Stoek, die zum Korrekturlesen herhalten musste und meine Launen tapfer ertragen hat;
- meine Eltern Ute und Horst Knippschild, die mir immer den Rücken frei halten, damit ich meine mir gesteckten Ziele erreichen kann;
- Herrn Professor Stefan Scherer für eine hervorragende Vorlesung über chirale Störungstheorie, die mir das Einarbeiten in diesen Themenbereich sehr erleichtert hat;
- meinen ehemaligen Schulkameraden Witali Krieger, ohne den ich vielleicht niemals Physik studiert hätte.

Mainz, den 16.04.2008