

Elektromagnetische Formfaktoren des Übergangs Nukleon nach Delta

Diplomarbeit
von
Marius Hilt

Institut für Kernphysik

Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Grundlagen der Quantenchromodynamik	11
2.1	Die Lagrangedichte der QCD	11
2.2	QCD im chiralen Grenzfall	13
2.3	QCD mit äußeren Feldern	14
2.4	Spontane Symmetriebrechung und das Goldstonetheorem	16
3	Die Deltaresonanz	18
3.1	Spin- $\frac{3}{2}$ -Teilchen	18
3.2	Die Lagrangedichte und Punktinvarianz	19
3.3	Isospin des Delta	20
3.4	Der Deltapropagator	22
3.5	Das ρ -Meson	24
4	Chirale Störungstheorie	25
4.1	Das Weinberg'sche Zählchema	25
4.2	Mesonen in χ PT	26
4.3	Nukleonen in χ PT	28
4.4	Die Deltaresonanz in χ PT	29
4.5	Renormierung	31
5	Formfaktoren der Deltaresonanz	37
5.1	Pionelektroproduktion	38
5.2	Multipolformfaktoren	42
5.3	Diagramme	43
5.4	Bestimmung der Formfaktoren	46
5.5	Ergebnisse	47
5.5.1	Ergebnisse in EOMS von Fit I	50
5.5.2	Ergebnisse in reformulierter IR von Fit I	53

5.5.3	Ergebnisse in EOMS von Fit II	57
5.5.4	Ergebnisse in reformulierter IR von Fit II	60
5.5.5	Vergleich mit anderen Rechnungen	63
5.5.6	Das Siegert-Theorem	66
6	Wellenfunktionsrenormierungskonstante der Deltaresonanz	71
7	Zusammenfassung	78
A	Notationen und Definitionen	80
B	Lorentzstrukturen der Diagramme der Formfaktoren	82
C	Isospinstruktur der Diagramme der Formfaktoren	84
D	Beiträge der Baumdiagramme	86
D.1	$N\gamma \rightarrow \Delta$ -Baumdiagramm	86
D.2	ρ^0 -Meson-Baumdiagramm	87
E	Schleifenintegrale	88
F	Abzugsterme in Infrarotrenormierung	91
G	Feynmanregeln	95

Kapitel 1

Einleitung

Dieses Kapitel soll einen kurzen Überblick über den Inhalt dieser Arbeit geben. Die zugrundeliegenden Theorien und Ansichten, die in der Physik existieren, werden kurz dargestellt und damit eine Motivation geschaffen für die in dieser Arbeit untersuchten Problemstellungen.

Ziel der Physik ist es, die Gesetzmäßigkeiten, welchen unsere Welt (das Universum) gehorcht, zu untersuchen, zu verstehen und zu beschreiben. Grundlage unseres Verständnisses der Physik bildet seit den frühen 1970ern das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (siehe z.B. [Pov+06]). Dieses beschreibt im wesentlichen die bekannten Elementarteilchen sowie die Wechselwirkungen zwischen diesen Teilchen.

Man geht davon aus, daß es vier fundamentale Wechselwirkungen gibt. Dies sind der Elektromagnetismus, die starke und die schwache Wechselwirkung sowie die Gravitation. Im Rahmen des Standardmodells werden nur die ersten drei beschrieben. Die Gravitation stellt sich als komplizierter heraus, da sie mit den bisherigen Methoden, den Darstellungen mittels Quantenfeldtheorien nicht als renormierbare Eichtheorie beschreibbar ist [NP86]. Die anderen Wechselwirkungen hingegen werden durch das Standardmodell mittels Eichtheorien beschrieben. Eine Eichtheorie basiert auf der Invarianz unter lokalen Transformationen. Damit läßt sich zeigen, daß der Elektromagnetismus und die schwache Wechselwirkung sich zur sogenannten elektroschwachen Wechselwirkung vereinheitlichen lassen. Die Symmetriegruppe dieser Wechselwirkung ist eine $SU(2) \times U(1)$ -Gruppe. Diese Gruppe hat vier Austauschteilchen, von denen die elektroschwache Wechselwirkung vermittelt wird. Sie werden als W^0 , W^\pm und B^0 bezeichnet. Allgemein sind die Austauschteilchen der Wechselwirkungen (mit Ausnahme der Gravitation) Spin-1-Teilchen. Insbesondere sind somit alle Austauschteilchen (auch das Graviton, durch das

die Gravitation vermittelt werden soll) sogenannte Bosonen, d.h. Teilchen mit ganzzahligem Spin. Im Falle der elektroschwachen Wechselwirkung findet eine Mischung des W^0 - und des B^0 -Teilchens zu den physikalisch meßbaren γ und Z^0 statt. Das γ vermittelt die elektromagnetische Wechselwirkung, d.h. es greift an die elektrische Ladung eines Teilchens an. W^\pm und Z^0 vermitteln die schwache Wechselwirkung und greifen an die schwache Ladung eines Teilchens an. Aufgrund einer spontanen Symmetriebrechung von $SU(2)_W \times U(1)_Y$ hin nach $U(1)_{EM}$ werden die Eichbosonen W^\pm und Z^0 massiv, während das Photon masselos bleibt. Die starke Wechselwirkung wird in der Sprache der Eichtheorien durch die Gruppe $SU(3)_C$ beschrieben. Dies bedeutet es gibt acht Austauscheteilchen. Man nennt diese Teilchen Gluonen. Sie besitzen eine sogenannte Farbladung. Durch diese koppeln die Gluonen an die entsprechende Farbladung der Quarks. In der elektromagnetischen Wechselwirkung ist es nicht möglich, daß nur die Austauscheteilchen miteinander interagieren. Bei der schwachen und starken Wechselwirkung ist dies durchaus möglich und ist auch eine wichtige Eigenschaft. In der Sprache der Gruppentheorie zeigt sich diese Eigenschaft dadurch, ob die zugehörige Eichgruppe abelsch (keine direkte Wechselwirkung der Austauscheteilchen möglich) oder nichtabelsch (Wechselwirkung der Austauscheteilchen möglich) ist. In Tabelle 1.1 sind nun die Eigenschaften der Wechselwirkungen im Standardmodell noch einmal kurz zusammengefaßt.

Wechselwirkung	koppelt an	Austauscheteilchen	Masse (GeV)
elektromagnetisch	elektrische Ladung	Photon	0
schwach	schwache Ladung	W^\pm, Z^0 ,	$\approx 10^2$
stark	Farbladung	acht Gluonen	0

Tabelle 1.1: Wechselwirkungen im Standardmodell

Die Elementarteilchen, aus denen die Welt zusammengesetzt ist, sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, also Fermionen. Diese werden in zwei Klassen eingeteilt: Leptonen und Quarks. Man nimmt an, daß diese Teilchen punktförmig sind [Ber06]. Die Quarks sind die einzigen Elementarteilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen (die zugehörige Eichtheorie nennt sich Quantenchromodynamik, kurz QCD). Das Besondere an ihnen ist, daß man sie nicht als freie Teilchen beobachten kann. Diese Eigenschaft wird als Confinement bezeichnet. Sobald man nämlich genügend Energie aufbringt, um Quarks zu trennen, bilden sich beim Trennen neue Quark-Antiquarkpaare, welche mit den ursprünglichen Quarks wieder neue Verbindungen eingehen, die man allgemein als Hadronen bezeichnet. Diese Hadronen unterteilen sich auch in zwei Typen, nämlich die Baryonen und die Mesonen. Die Baryonen bestehen aus

drei Quarks, die Mesonen aus einem Quark-Antiquarkpaar. Dies steht mit einer weiteren Eigenschaft der Hadronen in Verbindung, für die die Farbladung verantwortlich ist. Es gibt drei Farbladungen, welche die Quarks annehmen können. In der Natur lassen sich jedoch nur farbneutrale Hadronen beobachten. Dies hängt auch wieder mit dem Confinement zusammen. Die Vorstellung hierbei ist, daß in einem Baryon die drei Quarks ein Singulett im Farbraum bilden. Bei den Mesonen bildet das Quark-Antiquarkpaar auch ein Singulett im Farbraum. Einige Beispiele für Baryonen sind das Proton und das Neutron. Auch die Deltaresonanz, die Thema dieser Arbeit ist, zählt zu den Baryonen. Wichtige Beispiele für Mesonen sind die sogenannten Pionen (π^\pm, π^0). Eine weitere interessante Eigenschaft der Hadronen ergibt sich bei hohen Energien. Die effektive Kopplungskonstante der QCD ist stark vom betrachteten Energiebereich abhängig. Bei niedrigen Energien, bei denen das Confinement eine Rolle spielt, ist sie sehr groß. Bei hohen Energien wird sie allerdings immer kleiner. Diese Eigenschaft nennt sich asymptotische Freiheit, da man die Quarks für unendlich hohe Energien als „freie“ Teilchen betrachten kann.

Die andere Gruppe der Elementarteilchen, die sogenannten Leptonen bestehen aus drei Paaren eines elektrisch geladenen, massiven Teilchens (Elektron, Myon, Tau) und eines elektrisch neutralen Teilchens (ν_e, ν_μ, ν_τ), dem Neutrino. Die Neutrinos werden im Standardmodell als masselos angenommen. Es gilt jedoch mittlerweile als gesichert, daß sie doch eine sehr kleine Masse besitzen. Die Leptonen und Quarks lassen sich nun zusammen in sogenannten Familien anordnen. Die Reihenfolge der Familien ergibt sich aus den ansteigenden Massen von Familie zu Familie. Zusammenfassend sind in Tabelle 1.2 die Elementarteilchen mit ihren wichtigsten Eigenschaften aufgeführt.

Klasse	Familie			elektrische Ladung (e)	Farbe
	1	2	3		
Leptonen	ν_e	ν_μ	ν_τ	0	-
	e	μ	τ	1	
Quarks	u	c	t	$2/3$	r,g,b
	d	s	b	$-1/3$	

Tabelle 1.2: Elementarteilchen im Standardmodell

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Deltaresonanz bei kleinen Energien. Berechnungen werden hierfür mittels quantenfeldtheoretischer Methoden durchgeführt. Das Konzept bei diesen Berechnungen basiert

auf der Störungstheorie. Dies bedeutet, daß man eine Entwicklung der Funktionen in einer kleinen Größe, normalerweise der Kopplungskonstante, durchführt. Allerdings ist wie oben beschrieben die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung bei kleinen Energien sehr groß. Somit ist eine Berechnung im üblichen Sinne nicht möglich.

Um nun Untersuchungen bei niedrigen Energien durchführen zu können, wurden verschiedene sogenannte effektive Feldtheorien entwickelt. Die in dieser Arbeit verwendete effektive Feldtheorie ist die chirale Störungstheorie (engl. chiral perturbation theory, kurz χ PT) [Wei79, GL85]. Sie basiert auf der Tatsache, daß die fundamentalen Bausteine der leichten Hadronen, nämlich u- und d-Quarks, sehr viel leichter sind als die Hadronen selbst. Im sogenannten chiralen Grenzfall werden nun die Quarks als masselos angenommen. Man verwendet in χ PT Mesonen (und später auch Baryonen) als effektive Freiheitsgrade anstelle der fundamentalen Quarks und Gluonen. Die Idee der Konstruktion der zugehörigen Lagrangedichte (durch die man die Theorie beschreibt) basiert auf einem Theorem von Weinberg [Wei79]. Danach konstruiert man die Theorie als die allgemeinste Theorie, die mit den Symmetrien der QCD im chiralen Grenzfall übereinstimmt. Man erhält damit eine $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie (in dieser Arbeit wird jedoch mit der kleineren $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie gearbeitet). Aufgrund experimenteller Beobachtungen geht man allerdings davon aus, daß in der Natur nur eine $SU(2)_V$ -Symmetrie vorliegt, welche durch sogenannte spontane Symmetriebrechung [Gol61] aus der $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie entsteht. Das von Nambu, Goldstone und anderen entwickelte Konzept der spontanen Symmetriebrechung erklärt auch, warum die Pionen sehr viel leichter als alle anderen Hadronen sind. Sie werden in dieser Theorie als die sogenannten Goldstonebosonen angesehen. Sie tragen nur deswegen eine Masse, da die Quarks eine (sehr kleine) Masse haben.

Konstruiert man nun eine Theorie nach dem Prinzip von Weinberg, so erhält man eine Lagrangedichte mit einer unendlichen Anzahl an Termen. Sie enthalten eine unendliche Anzahl sogenannter Niederenergiekonstanten. Diese sind nicht aus der chiralen Störungstheorie bestimmbar, aber sie spiegeln die Eigenschaften der QCD wieder. Wäre man in der Lage die QCD zu lösen, so könnte man diese Konstanten auch daraus bestimmen. In der Praxis jedoch werden sie an experimentelle Daten angepaßt. Um nun in der Lage zu sein in χ PT überhaupt etwas berechnen zu können, benötigt man ein weiteres Konzept von Weinberg, das sogenannte Power-Counting [Wei79]. Dieses liefert einem Informationen darüber, wie groß der Beitrag einzelner Diagramme zu einem physikalischen Prozess ist. Es basiert dabei im rein mesonischen Sek-

tor auf einer linearen Reskalierung innerer Impulse und einer quadratischen Reskalierung der Quarkmassen in den Feynmandiagrammen (zu Feynmandiagrammen siehe z.B. [PS97]).

Berechnet man in Quantenfeldtheorien Prozesse, so sieht man sich mit der Tatsache konfrontiert, daß in den Ergebnissen Divergenzen (Unendlichkeiten) auftreten. Diese entstehen, da man in den Feynmandiagrammen über alle Werte innerer Impulse integriert. Dieses Problem löst man durch Renormierung. Dies bedeutet, man schreibt die Lagrangedichte so um, daß die Parameter (Massen, Kopplungskonstanten) so verändert werden, daß sie aus einem unendlichen Anteil, der die Divergenzen weghebt und einem endlichen (physikalisch meßbaren) Anteil bestehen [Col84]. Im herkömmlichen Sinne ist die chirale Störungstheorie allerdings eine nichtrenormierbare Theorie, da die Lagrangedichte aus einer unendlichen Anzahl von Termen besteht. Jedoch ist sie im Rahmen der Reihenentwicklung durch das Power-Counting bis zu einer gewünschten Ordnung renormierbar. Das Standardrenormierungsschema im rein mesonischen Sektor ist das sogenannte modifizierte Abzugsverfahren (\overline{MS}) der chiralen Störungstheorie. Möchte man nun die chirale Störungstheorie auf die leichtesten Baryonen, nämlich die Nukleonen erweitern, so ist man erst einmal mit einem Problem konfrontiert. Die Masse der Nukleonen verschwindet im chiralen Grenzfall nämlich nicht. Wendet man nun das Power-Counting zusammen mit dem \overline{MS} -Schema an, so ist die Theorie inkonsistent. Dies zeigt sich darin, daß man bei der Berechnung eines Diagramms Terme von niedrigerer chiraler Ordnung erhält, als das Power-Counting vorhersagt. Ein erster Lösungsansatz war die sogenannte Heavy Baryon Chiral Perturbation Theory ($\text{HB}\chi\text{PT}$) [GSS88, Kra90]. Hierbei wird der Impuls des Baryons in einen Anteil, der in der Größenordnung der Baryonmasse liegt und in einen kleinen Restanteil aufgeteilt. Andererseits ist die so formulierte Theorie nicht manifest lorentzinvariant und es zeigen sich auch Probleme bei der Konvergenz [BKM96]. Es wurden mittlerweile jedoch auch Ansätze für die Renormierung entwickelt, welche die Konsistenz des Zählschemas beibehalten (z.B. [Tan96], [ET98], [BL99]). Zwei dieser Ansätze werden in dieser Arbeit auch verwendet (das sogenannte reformulierte Infrarotrenormierungsschema und das extended on-mass-shell (EOMS)-Schema).

Möchte man die Theorie nun auf die nächstschwereren Baryonen erweitern, so landet man bei der Deltaresonanz. Diese ist ein Spin- $\frac{3}{2}$ -Teilchen. In [HHK98] wurde sie in $\text{HB}\chi\text{PT}$ eingebaut. In [Hac+05] wurde dies weiterentwickelt, um die Deltaresonanz in einer lorentzkovarianten Form einzubauen.

Wenn man nun die Deltaresonanz durch χ PT beschreiben kann, so lassen sich auch ihre Eigenschaften in dieser Theorie berechnen. Ziel dieser Arbeit ist es, einen Teil dieser Eigenschaften zu untersuchen. Berechnet werden die sogenannten $\gamma N\Delta$ -Übergangsformfaktoren. Im allgemeinen läßt sich aus der Kenntnis von Formfaktoren viel über die Form eines Teilchens aussagen. So zeigt sich bei der Deltaresonanz, daß sie nicht exakt sphärisch, sondern ein wenig deformiert ist [Ber02, GH06].

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 werden die wichtigsten Eigenschaften der QCD dargestellt. Dabei wird insbesondere der chirale Grenzfall betrachtet, da die chirale Störungsrechnung darauf aufbaut. In Kapitel 3 wird erklärt, wie man die Deltaresonanz in einer Feldtheorie beschreibt. Es wird die Bewegungsgleichung diskutiert, eine Beschreibung des Isospin wird gezeigt und weitere wichtige Eigenschaften der Deltaresonanz werden erläutert. Danach werden kurz die wichtigsten Eigenschaften des ρ -Mesons aufgeführt. Dieses wird nämlich noch zusätzlich in die Berechnung der Übergangsformfaktoren eingebaut, um deren Beschreibung zu verbessern. In Kapitel 4 werden die Konzepte der chiralen Störungsrechnung erklärt. Dazu gehört z.B. das Power Counting. Des weiteren wird im einzelnen erklärt, wie man Mesonen, Nukleonen und zuletzt die Deltaresonanz in die chirale Störungsrechnung einbaut. Überdies werden die hier verwendeten Renormierungsschemata noch etwas ausführlicher erläutert. In Kapitel 5 werden die hier berechneten Übergangsformfaktoren definiert. Außerdem wird gezeigt, wie man sie berechnen kann (dies wurde bis chirale Ordnung drei durchgeführt). Danach werden die erzielten Ergebnisse dargestellt und diskutiert. In Kapitel 6 wird noch die Wellenfunktionsrenormierungskonstante der Deltaresonanz in chiraler Ordnung drei berechnet. Diese ist wichtig, um aus Green'schen Funktionen physikalisch meßbare Größen abzuleiten. In Kapitel 7 werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefaßt.

Kapitel 2

Grundlagen der Quantenchromodynamik

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit relevanten Eigenschaften der Quantenchromodynamik (QCD) erklärt. Dafür wird zuerst die zugehörige Lagrangedichte diskutiert und insbesondere der sogenannte chirale Grenzfall betrachtet. Weiterhin wird das Goldstonetheorem erläutert, das im Zusammenhang mit der spontanen Symmetriebrechung in der QCD eine wichtige Rolle spielt. Dieses Kapitel folgt im wesentlichen der Darstellung von [Sch03].

2.1 Die Lagrangedichte der QCD

Die Quantenchromodynamik ist die Eichtheorie der starken Wechselwirkung [GW73]. Die zugrundeliegende Symmetriegruppe ist die Farb-SU(3), d.h. eine nichtabelsche Gruppe. Die Materiefelder dieser Theorie sind die Quarks. Es gibt sechs Flavours (up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b), top (t)). Diese tragen eine sogenannte Farbladung, welche die Werte Rot (r), Grün (g) oder Blau (b) annehmen kann. Damit bilden die Quarkflavour einen dreikomponentigen Vektor im Farbraum:

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Bei den Quarks handelt es sich um Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, weswegen sie der Diracgleichung gehorchen. Aus dem Eichprinzip erhält man somit folgende Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=u,d,s,c,b,t} \bar{q}_f (i\not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

D^μ in $\mathcal{D} = \gamma_\mu D^\mu$ bezeichnet hier die kovariante Ableitung. Der Ausdruck $G_{\mu\nu,a}$ bezeichnet den sogenannten Feldstärketensor, der durch

$$G_{\mu\nu,a} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\nu,a} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\mu,a} + gf_{abc} \mathcal{A}_{\mu,b} \mathcal{A}_{\nu,c} \quad (2.3)$$

definiert ist (f_{abc} stellen die Strukturkonstanten der Gruppe SU(3) dar). Dieser macht aus den Eichpotentialen $\mathcal{A}_{\mu,a}$ dynamische Freiheitsgrade. Da die SU(3) eine nichtabelsche Gruppe ist, entstehen durch das Quadrat des Feldstärketensors Selbstwechselwirkungen mit Vertizes aus drei oder vier Eichfeldern. Die Quarkflavour aus Gleichung (2.2) gehorchen nun folgendem lokalen Transformationsgesetz:

$$q_f \mapsto q'_f = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a(x) \frac{\lambda_a^C}{2} \right) q_f = U[g(x)] q_f. \quad (2.4)$$

Hierbei bezeichnet λ_a^C die Gell-Mann Matrizen und der Index C deutet die Wirkung im Farbraum an. Da die SU(3) acht Generatoren hat, stehen in der kovarianten Ableitung acht unabhängige Eichpotentiale $\mathcal{A}_{\mu,a}$:

$$D_\mu \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix} = \partial_\mu \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix} - ig \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a^C}{2} \mathcal{A}_{\mu,a} \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Hierbei ist festzustellen, daß die Wechselwirkung der Quarks mit den Gluonen unabhängig vom Flavour ist. Damit die Lagrangedichte aus Gleichung (2.2) eichinvariant ist, muß nach dem Eichprinzip die kovariante Ableitung D_μ transformieren wie q_f selbst. Dies führt auf

$$\frac{\lambda_a^C}{2} \mathcal{A}_{\mu,a}(x) \mapsto U[g(x)] \frac{\lambda_a^C}{2} \mathcal{A}_{\mu,a}(x) U^\dagger[g(x)] - \frac{i}{g} \partial_\mu U[g(x)] U^\dagger[g(x)]. \quad (2.6)$$

Des weiteren gilt zu beachten, daß vom Standpunkt der Eichinvarianz in der Lagrangedichte auch ein Term

$$\sim \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a \quad (2.7)$$

enthalten sein kann ($\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ bezeichnet hierbei den Levi-Civita-Tensor). Da \mathcal{L}_{QCD} positive Parität hat und Gleichung (2.7) negative Parität, wird ein Term dieser Form als sehr klein oder sogar gleich Null angenommen, da bisher keine Paritätsverletzung in der starken Wechselwirkung festgestellt wurde.

Flavour	u	d	s
Ladung [e]	2/3	-1/3	-1/3
Masse [MeV]	1.5 - 3.3	3.5 - 6	104(+26 - 34)
Flavour	c	b	t
Ladung [e]	2/3	-1/3	2/3
Masse [GeV]	1.27(+0.07 - 0.11)	4.20(+0.17 - 0.07)	171.2 ± 2.1

Tabelle 2.1: Ladung und Masse der Quarks nach [Ams+08]

2.2 QCD im chiralen Grenzfall

Die Quarkmassen (siehe Tabelle 2.1) werden gewöhnlich folgendermaßen unterteilt:

$$m_u, m_d, m_s \ll 1\text{GeV} \leq m_c, m_b, m_t. \quad (2.8)$$

Dabei steht die Skala von 1 GeV in Zusammenhang mit den leichtesten Hadronen, die keine Goldstonebosonen sind. Die Energieskala, welche in Zusammenhang mit der spontanen Symmetriebrechung steht ($4\pi F_\pi \approx 1170$ MeV), liegt auch in dieser Größenordnung. Die spontane Symmetriebrechung und die Goldstonebosonen werden in Kapitel 2.4 näher erklärt. Mit obiger Aufteilung in leichte und schwere Quarks läßt sich auch die Lagrangedichte (2.2) aufteilen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \left(\sum_{l=u,d,s} \bar{q}_l(i\not{D} - m_f)q_l + \sum_{h=c,b,t} \bar{q}_h(i\not{D} - m_f)q_h \right) - \frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu,a} \quad (2.9) \\ &= \mathcal{L}_{\text{leichte Quarks}} + \mathcal{L}_{\text{schwere Quarks}} + \mathcal{L}_{WW}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Vergleicht man die Masse der Quarks mit den leichtesten Baryonen, z.B.

$$2m_u + m_d \ll m_p, \quad (2.11)$$

so sieht man, daß der Beitrag der leichten Quarks zur Gesamtmasse vernachlässigt werden kann. Dies ist eine Motivation für die Betrachtung des chiralen Grenzfalls. Dabei wird die Masse der leichten Quarks vernachlässigt, d.h. $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$. In dieser Arbeit wird auch das s-Quark zu den schweren Quarks gezählt. Im chiralen Grenzfall und unter Vernachlässigung der schweren Quarks (da deren Beitrag bei kleinen Energien gering ist) erhält man folgende Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{l=u,d} i\bar{q}_l\not{D}q_l - \frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu,a}. \quad (2.12)$$

Durch Einführen von Projektionsoperatoren

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad (2.13)$$

und Definieren der links- und rechtshändigen Quarkfelder als

$$q_L = P_L q, \quad q_R = P_R q, \quad (2.14)$$

läßt sich die Lagrangedichte aus Gleichung (2.12) schreiben als

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{k=u,d} i (\bar{q}_{L,k} \not{D} q_{L,k} + \bar{q}_{R,k} \not{D} q_{R,k}) - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu,a}. \quad (2.15)$$

In dieser Lagrangedichte wechselwirken nur noch links- mit linkshändigen und rechts- mit rechtshändigen Quarks. Somit transformieren sie auch unabhängig voneinander unter der Gruppe $SU(2)$. Damit liegt eine globale $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie vor. Diese Symmetrie ist nicht perfekt erhalten, sondern wird durch die Quarkmassen gebrochen (explizite Symmetriebrechung). Es läßt sich auch zeigen, daß die Lagrangedichte aus Gleichung (2.15) eine $U(1)_V$ -Symmetrie besitzt, welche im Zusammenhang mit dem Baryonenzahlerhalt steht. Somit ist die Gesamtsymmetrie im hier betrachteten Grenzfall klassisch gesehen $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$. Der Axialvektorstrom (folgt aus $U(1)_A$) ist aber nur klassisch erhalten. Quantisiert besitzt dieser Strom eine Anomalie. Deswegen ist die tatsächliche Symmetrie nur $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$. Zusätzlich gilt zu beachten, daß die Lagrangedichte aus Gleichung (2.2) (und somit die Lagrangedichten aus Gleichung (2.12) und (2.15)) invariant unter Paritätstransformation (P), Zeitumkehrtransformation (T) und Ladungskonjugation (C) ist. Aufgrund ihrer Struktur ist sie auch lorentzinvariant.

2.3 QCD mit äußeren Feldern

In Berechnungen konkreter Prozesse in Quantenfeldtheorien, stellen Green'sche Funktionen Objekte dar, deren Berechnung ein wesentlicher Schritt zur Bestimmung von physikalischen Vorhersagen ist. Diese Green'schen Funktionen sind definiert als Vakuumerwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Operatoren. Symmetrien eines Systems spielen hierbei eine wichtige Rolle, denn sie liefern Bedingungen an und zwischen Green'schen Funktionen. Diese Symmetriebeziehungen werden allgemein als Ward-Fradkin-Takahashi-Identitäten (kurz Ward-Identitäten) bezeichnet.

Formal werden alle Green'schen Funktionen in einem erzeugenden Funktional dargestellt. Die Menge aller Ward-Identitäten steckt nun in den Invarianzeigenschaften dieses erzeugenden Funktionals.

Eine Möglichkeit dieses Funktional zu erzeugen ist wie folgt: Um Wechselwirkungen mit äußeren Feldern zu berücksichtigen, werden an die Lagrangedichte der QCD (2.15) Vektor- und Axialvektorströme sowie skalare und pseudoskalare Quarkdichten gekoppelt. Damit erhält man

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \bar{q}\gamma_\mu(v^\mu + \frac{1}{3}v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu)q - \bar{q}(s - i\gamma_5 p)q. \quad (2.16)$$

Die externen Felder sind hierbei farbneutrale hermitesche 2×2 -Matrizen:

$$\begin{aligned} v^\mu &= \sum_{i=1}^3 \frac{\tau_i v_i^\mu}{2}, & a^\mu &= \sum_{i=1}^3 \frac{\tau_i a_i^\mu}{2}, & v_{(s)}^\mu &= \frac{v_0^\mu}{2} 1_{2 \times 2}, \\ s &= s_0 1_{2 \times 2} + \sum_{i=1}^3 \tau_i s_i, & p &= p_0 1_{2 \times 2} + \sum_{i=1}^3 \tau_i p_i. \end{aligned} \quad (2.17)$$

In Gleichung (2.17) wird \mathcal{L}_{QCD}^0 verwendet, da die Quarkmassen (explizit symmetriebrechende Terme) als externe Felder beschrieben werden. Schaut man nämlich den Fall $v^\mu = a^\mu = p = 0$ und $s = \text{diag}(m_u, m_d)$ an, so erhält man wieder die Lagrangedichte mit $m_q \neq 0$. Wenn nun die externen Felder folgendermaßen transformieren

$$\begin{aligned} r^\mu &\mapsto V_R r^\mu V_R^\dagger + i V_R \partial^\mu V_R^\dagger, \\ l^\mu &\mapsto V_L l^\mu V_L^\dagger + i V_L \partial^\mu V_L^\dagger, \\ v_\mu^{(s)} &\mapsto v_\mu^{(s)} - \partial_\mu \Theta, \\ s + ip &\mapsto V_R (s + ip) V_L^\dagger, \\ s - ip &\mapsto V_L (s - ip) V_R^\dagger, \end{aligned} \quad (2.18)$$

dann ist die Lagrangedichte invariant unter lokalen $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ -Transformationen und sie erfüllt Hermitizität und Invarianz unter C, P und T.

Das erzeugende Funktional ist nun durch

$$\exp(iZ[v, a, s, p]) = \langle 0 | T \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{ext}(x) \right] | 0 \rangle \quad (2.19)$$

gegeben. Jede benötigte Green'sche Funktion aus zeitgeordneten, farbneutralen, hermiteschen, quadratischen Formen läßt sich aus diesem Funktional ableiten.

2.4 Spontane Symmetriebrechung und das Goldstonetheorem

Man wähle ein System, dessen Hamiltonoperator invariant unter einer Symmetriegruppe G ist. Spontane Symmetriebrechung liegt vor, wenn der Grundzustand des Systems nicht invariant unter G sondern nur unter der Untergruppe $H \subset G$ ist. Nach dem sogenannten Goldstonetheorem [Gol61] führt diese spontane Symmetriebrechung zur Existenz masseloser Goldstonebosonen. Die Anzahl der Goldstonebosonen ist durch

$$n = n_G - n_H \quad (2.20)$$

gegeben, wobei n_G die Anzahl der Generatoren der Gruppe G und n_H die Anzahl der Generatoren der entsprechenden Untergruppe ist. Das Colemantheorem [Col66] besagt nun, daß die Symmetrie eines Systems durch die Symmetrie des Grundzustands und nicht durch die Symmetrie des Hamiltonoperators gegeben ist.

Schaut man nun auf die QCD im chiralen Grenzfall mit ihrer $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie, so würde man ursprünglich erwarten, daß die Hadronen sich in näherungsweise entarteten Multipletts anordnen, die unter den verschiedenen irreduziblen Darstellungen der Gruppe $SU(2)_L \times SU(2)_R$ transformieren. Schaut man auf das in der Natur vorkommenden Teilchenspektrum, so stellt man fest, daß dem nicht der Fall ist. Aufgrund der $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie würde man z.B. zu jedem Multiplett positiver Parität ein Multiplett negativer Parität erwarten. Sieht man sich nun z.B. das Baryonendublett bestehend aus Proton und Neutron an, so findet man zu diesem Dublett positiver Parität kein entsprechendes entartetes Dublett negativer Parität. Das Teilchenspektrum besitzt also eine andere Symmetrie als der Hamiltonoperator. Diese wird als $SU(2)_V$ -Symmetrie identifiziert. Aus Colemantheorem und Goldstonetheorem ergibt sich nun folgende Schlussfolgerung: Da die Symmetrie des Systems durch die Symmetrie des Grundzustands und nicht durch die Symmetrie des Hamiltonoperators bestimmt wird (Colemantheorem), besitzt das Hadronenspektrum eine $SU(2)_V$ -Symmetrie. Da man jedoch ursprünglich von einer $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie ausgegangen ist, folgt nach dem Goldstonetheorem die Existenz von $6 - 3 = 3$ masselosen Goldstonebosonen. Dadurch läßt sich erklären, warum die pseudoskalaren Mesonen (Pionen, $m_\pi \approx 140$ MeV) wesentlich leichter als die Vektormesonen (ρ -Mesonen, $m_\rho \approx 770$ MeV) sind. Die Pionen werden als die Goldstonebosonen der QCD interpretiert. Die Tatsache, daß die Pionen nicht masselos sind, liegt daran, daß die hier betrachteten Symmetrien nur im chiralen Grenzfall

perfekt sind. In der Realität liegt aber eine explizite Symmetriebrechung vor (d.h. $m_u, m_d \neq 0$), weswegen die Pionen eine endliche Masse besitzen.

Kapitel 3

Die Deltaresonanz

Die Deltaresonanz wurde um 1951/52 das erste Mal experimentell nachgewiesen von Anderson et al. [And+52]. Mit einer Masse von 1232 MeV ist sie das leichteste Spin- $\frac{3}{2}$ -Teilchen. Man fand vier verschiedene Isospin-Zustände, in denen die Deltaresonanz vorkommt. Sie hat allerdings eine sehr kurze Lebensdauer ($\approx 10^{-23}s$), da sie eine große Zerfallsbreite von ≈ 120 MeV besitzt. Zerfallen kann sie dabei auf zwei Arten. Dominiert wird der Zerfall durch die starke Wechselwirkung, welcher sich durch die Reaktion $\Delta \rightarrow N + \pi$ manifestiert. In geringem Maße ist auch ein elektromagnetischer Zerfall, d.h. $\Delta \rightarrow N + \gamma$ möglich. Untersucht werden die Eigenschaften der Deltaresonanz z.B. bei BATES oder MAMI und meist durch Streuprozesse von Elektronen oder Photonen an Nukleontargets oder durch Pion-Nukleonstreuung.

In diesem Kapitel werden im folgenden die wichtigsten Eigenschaften der Deltaresonanz kurz erläutert. Dazu gehört z.B. die Bewegungsgleichung, wie man den Isospin behandelt, wie die (Wechselwirkungs-)Lagrangedichten aussehen und weitere Eigenschaften des Delta.

3.1 Spin- $\frac{3}{2}$ -Teilchen

Man benötigt für die Deltaresonanz als Spin $\frac{3}{2}$ -Teilchen eine Bewegungsgleichung, um sie beschreiben zu können. Eine Möglichkeit dies zu tun, wurde von Rarita und Schwinger entwickelt [RS41]. Sie beschreiben sogar den allgemeineren Fall eines Teilchens mit Spin $k + \frac{1}{2}$. Für den Spezialfall $k = 1$ ergibt sich somit die Bewegungsgleichung für die Deltaresonanz. Nach Rarita und Schwinger wird ein Teilchen mit Spin $k + \frac{1}{2}$ durch einen Tensor $\psi_{\alpha\mu_1\cdots\mu_{k-1}}$, der vollständig symmetrisch in seinen k Lorentzindizes ist, beschrieben. Dabei ist jede Komponente dieses Tensors selbst ein Diracspinor (Spinorindizes

hier und im folgenden unterdrückt). Die Bewegungsgleichung für jede Komponente des Tensors ist die Diracgleichung

$$(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi_{\alpha\mu_1\dots\mu_{k-1}} = 0. \quad (3.1)$$

Ein Tensor der Form $\psi_{\alpha\mu_1\dots\mu_{k-1}}$ besitzt aber mehr Komponenten, als das zu beschreibende Teilchen Freiheitsgrade hat. Deswegen wählt man folgende Zwangsbedingung

$$\gamma^\alpha \psi_{\alpha\mu_1\dots\mu_{k-1}} = 0, \quad (3.2)$$

durch die die Anzahl unabhängiger Komponenten reduziert wird. Es ergibt sich durch Anwenden von γ^α auf (3.1) unter Verwendung von (3.2) noch folgende weitere Zwangsbedingung:

$$\partial^\alpha \psi_{\alpha\mu_1\dots\mu_{k-1}} = 0. \quad (3.3)$$

Die Gültigkeit dieses Tensors zur Beschreibung eines Spin $k + \frac{1}{2}$ -Teilchens läßt sich zum Beispiel dadurch zeigen, daß man den Erwartungswert des Quadrats des Spins im Ruhesystem des Teilchens bestimmt. Dieser muß

$$\langle S^2 \rangle = (k + \frac{1}{2})(k + \frac{3}{2}) \quad (3.4)$$

sein, was sich z.B. mittels ebener Wellen als Lösungen zeigen läßt.

3.2 Die Lagrangedichte und Punktinvarianz

Für ein Teilchen mit Spin $\frac{3}{2}$ in D Raumzeitdimensionen läßt sich die Bewegungsgleichung aus folgender Lagrangedichte herleiten [Pil05]:

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}^\alpha \Lambda_{\alpha\beta}^{A,D} \psi^\beta \quad (3.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^{A,D} = & (i\rlap{-}\not{\partial} - m)g_{\alpha\beta} + iA(\gamma_\alpha\partial_\beta + \gamma_\beta\partial_\alpha) \\ & + \frac{i}{D-2}((D-1)A^2 + 2A + 1)\gamma_\alpha\rlap{-}\not{\partial}\gamma_\beta \\ & + \frac{m}{(D-2)^2}(D(D-1)A^2 + (4D-1)A + D)\gamma_\alpha\gamma_\beta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A stellt einen (vorerst) beliebigen Parameter dar. Dieser Ausdruck ist auf $D \neq 2$ und $A \neq -\frac{1}{2}$ eingeschränkt. Es ist besonders zu beachten, daß die Dimensionsabhängigkeit für $A = -1$ aus der Formel herausfällt.

Die Lagrangedichte aus Gleichung (3.5) ist invariant unter der gleichzeitigen Anwendung der folgenden Transformationen:

$$\psi_\mu \mapsto \psi_\mu + \frac{4a}{D}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi^\nu, \quad (3.7)$$

$$A \mapsto \frac{AD - 8a}{D(1 + 4a)}, \quad a \neq -\frac{1}{4}. \quad (3.8)$$

Diese Art der Transformation wird in der Literatur oft als Punkttransformation bezeichnet [NEK71, TE96]. Jedoch stellt nur die Transformation (3.7) eine Punkttransformation im herkömmlichen Sinne dar. Nach dem Äquivalenztheorem [KOS61] sind physikalische Größen unabhängig von Feldredefinitionen (Gleichung (3.7)). Durch eine Transformation des Feldes nach obiger Gleichung wird gleichzeitig dem Parameter A ein neuer Wert zugeordnet, d.h. physikalische Größen hängen nicht von A ab. Man kann dadurch jeden beliebigen Wert für A erhalten. In dieser Arbeit wird $A = -1$ gewählt. Eine Motivation für diese Wahl wird z.B. in Kapitel 3.4 geliefert.

3.3 Isospin des Delta

Die Deltaresonanz ist nicht nur ein Teilchen mit Spin $\frac{3}{2}$, sondern sie besitzt auch einen sogenannten starken Isospin $I = \frac{3}{2}$. Dieser wird im folgenden in die Beschreibung des Delta eingebaut.

Der Isospin $\frac{3}{2}$ erzeugt für ein Teilchen vier Freiheitsgrade, d.h. man könnte ihn z.B. durch einen vierkomponentigen Vektor beschreiben, der die Freiheitsgrade $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0$ und Δ^- berücksichtigt. Die Vorgehensweise in dieser Arbeit ist jedoch eine andere. Dies hat aber nur rechentechnische Gründe. Durch den hier verwendeten Formalismus läßt sich der Isospin leicht handhaben. Insbesondere sind die physikalischen Ergebnisse aber unabhängig von der Art der Beschreibung des Isospins.

Der Isospin $\frac{3}{2}$ läßt sich durch Kopplung der Isospins 1 und $\frac{1}{2}$ erzeugen. Dadurch erhält also der Vektorspinor ψ^μ noch zwei weitere Indizes $i = 1, 2, 3$ und $\alpha = 1, 2$. Somit erhält man ein Vektorspinor-Isovektor-Isospinorfeld $\psi_{i,\alpha}^\mu$. Dieses Objekt besitzt jetzt natürlich mehr Isospinfreiheitsgrade als benötigt. Diese sind konkret die Isospin- $\frac{1}{2}$ -Anteile, wie man anhand der Clebsch-Gordan-Zerlegung sieht:

$$\frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}. \quad (3.9)$$

Zur Elimination der zusätzlichen Freiheitsgrade betrachtet man folgende Beziehung zwischen der kartesischen und sphärischen Basis des Isospinraums

(siehe [Sch07]):

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=-1/2}^{1/2} \psi_{i,\alpha} |i\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \alpha\rangle = \sum_{m=-1}^1 \sum_{\alpha=-1/2}^{1/2} (-)^m \psi_{-m,\alpha}^{(1)} |1, m\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \alpha\rangle. \quad (3.10)$$

In der gekoppelten Basis läßt sich der Vektor $|\Delta\rangle$ darstellen als

$$|\Delta\rangle = \sum_{M=-3/2}^{3/2} \Delta_M |\frac{3}{2}, M\rangle. \quad (3.11)$$

Den Übergang zur sphärischen Basis kann man nun mittels Clebsch-Gordan-Koeffizienten beschreiben

$$|\Delta\rangle = \sum_{\alpha, m, M} |1, m\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \alpha\rangle \underbrace{\langle 1, m; \frac{1}{2}, \alpha | (\frac{1}{2}) \frac{3}{2}, M \rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeffizient}} \Delta_M. \quad (3.12)$$

Somit sind die Komponenten in sphärischer Basis gegeben durch

$$\Delta_{-m,\alpha}^{(1)} = \sum_M \langle 1, m; \frac{1}{2}, \alpha | (\frac{1}{2}) \frac{3}{2}, M \rangle \Delta_M. \quad (3.13)$$

Einsetzen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten liefert nun für die kartesische Basis

$$\begin{aligned} \Delta_1^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_\mu^0 - \Delta_\mu^{++} \\ \Delta_\mu^- - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_\mu^+ \end{pmatrix}, \\ \Delta_2^\mu &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Delta_\mu^{++} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_\mu^0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_\mu^+ + \Delta_\mu^- \end{pmatrix}, \\ \Delta_3^\mu &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \Delta_\mu^+ \\ \Delta_\mu^0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die dadurch gewählte Phasenkonvention stimmt überein mit [TE96], aber nicht mit [HHK98]. Um nun einen Zustand zu erhalten, der nur den Isospin- $\frac{3}{2}$ -Anteil enthält, benötigt man einen Projektionsoperator, $P^{\frac{3}{2}}$, der einem genau diese Komponenten herausprojiziert. Dieser hat nun die Form

$$P^{\frac{3}{2}} = \sum_M |\frac{3}{2}, M\rangle \langle \frac{3}{2}, M|. \quad (3.15)$$

Aus $P^{\frac{1}{2}} + P^{\frac{3}{2}} = 1$ ergibt sich nun für $P^{\frac{1}{2}}$:

$$P^{\frac{1}{2}} = 1 - P^{\frac{3}{2}}. \quad (3.16)$$

Damit ergibt sich letztendlich für die Komponenten der Projektionsoperatoren in kartesischer Basis

$$\begin{aligned} P_{i,j,\alpha,\beta}^{\frac{3}{2}} &= \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}(\tau_i\tau_j)_{\alpha\beta} \quad \text{sowie} \\ P_{i,j,\alpha,\beta}^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{3}(\tau_i\tau_j)_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hierbei werden mit τ_i ($i = 1, 2, 3$) die Paulimatrizen bezeichnet. Man kann zeigen, daß

$$\tau_i \Delta_i^\mu = \tau_i P_{ij,\alpha\beta}^{\frac{3}{2}} \psi_{j,\beta}^\mu = 0. \quad (3.18)$$

Schließlich erhält man die vollständige freie Lagrangedichte des Delta mit Hilfe des Projektionsoperators (Isospinindizes unterdrückt) :

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}^{\mu,i} P_{ir}^{\frac{3}{2}} \Lambda_{\mu\nu}^{A,n} P_{rj}^{\frac{3}{2}} \psi^{\nu,j}. \quad (3.19)$$

Da aus den sechs Isospinfreiheitsgraden nur vier herausprojiziert werden, ergibt sich eine Invarianz der Lagrangedichte unter lokalen Transformationen der Form (Isospinindizes unterdrückt)

$$\psi_i^\mu(x) \mapsto \psi_i^\mu(x) + \tau_i \alpha^\mu(x). \quad (3.20)$$

Damit hat man also eine Eichfreiheit. Für die Quantisierung von Systemen mit Eichfreiheit ist eine Eichbedingung erforderlich. Es bietet sich an (siehe Gleichung (3.18))

$$\tau_i \psi_i^\mu = 0 \quad (3.21)$$

zu wählen.

3.4 Der Deltapropagator

Der freie Propagator des Delta läßt sich nun aus der Lagrangedichte (3.19) des freien Delta herleiten. Da dieser Propagator auch den Isospin berücksichtigen muß, erhält man als Ansatz die Struktur

$$S_{0ij}^{\mu\nu} = P_{ij}^{\frac{3}{2}} S_0^{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

In [Ryd85] z.B. wird die prinzipielle Vorgehensweise erklärt, mit der man nun den Propagator bestimmen kann. Die Isospinstruktur spielt hierfür keine

Rolle und wird deshalb im folgenden nicht mitbetrachtet. Der Propagator erfüllt die Identität im Ortsraum

$$\Lambda^{\mu\nu}\tilde{S}_{0\nu\alpha}(x-y) = -\delta_\alpha^\mu\delta^D(x-y), \quad \Lambda_{\mu\nu} \equiv \Lambda_{\mu\nu}^{A,D}. \quad (3.23)$$

Nun betrachtet man jeweils die Fouriertransformation der beiden Seiten der Gleichung

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{0\nu\alpha}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p S_{0\nu\alpha}(p) e^{-ip\cdot(x-y)}, \\ \delta^D(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p e^{-ip\cdot(x-y)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Einsetzen von Gleichung (3.24) in Gleichung (3.23) und vertauschen der Integration und Differentiation (damit wirkt ∂_μ auf die Exponentialfunktion und es entsteht $-ip_\mu$) liefert:

$$\tilde{\Lambda}^{\mu\nu} S_{0\nu\alpha}(p) = -\delta_\alpha^\mu, \quad \tilde{\Lambda}^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu\nu}|_{\partial_\mu = -ip_\mu}. \quad (3.25)$$

Die Lösung dieser Gleichung muß ein Tensor zweiter Stufe sein, welcher nur Strukturen aus Gammamatrizen und dem Impuls p beinhalten darf. Davon existieren insgesamt zehn unabhängige Strukturen, so daß der Lösungsansatz lautet

$$S_{0\nu\alpha}(p) = \sum_{i=1}^{10} \sigma_i X_{\nu\alpha i}. \quad (3.26)$$

Die Lorentzstrukturen sind:

$$\begin{aligned} X_1^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}, \quad X_2^{\mu\nu} = \gamma^\mu\gamma^\nu, \quad X_3^{\mu\nu} = p^\mu\gamma^\nu, \quad X_4^{\mu\nu} = \gamma^\mu p^\nu, \quad X_5^{\mu\nu} = p^\mu p^\nu, \\ X_6^{\mu\nu} &= \not{p}g^{\mu\nu}, \quad X_7^{\mu\nu} = \not{p}\gamma^\mu\gamma^\nu, \quad X_8^{\mu\nu} = \not{p}p^\mu\gamma^\nu, \quad X_9^{\mu\nu} = \not{p}\gamma^\mu p^\nu, \quad X_{10}^{\mu\nu} = \not{p}p^\mu p^\nu. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die Koeffizienten σ_i lassen sich bestimmen, indem man Gleichung (3.26) in Gleichung (3.25) einsetzt und einen Koeffizientenvergleich durchführt. Als Ergebnis erhält man dadurch

$$\begin{aligned} S_0^{\mu\nu} &= -\frac{\not{p} + m_\Delta}{p^2 - m_\Delta^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu}{D-1} - \frac{\gamma^\mu p^\nu - p^\nu\gamma^\mu}{(D-1)m_\Delta} - \frac{(D-2)p^\alpha p^\beta}{(D-1)m_\Delta^2} \right) \\ &\quad - \frac{A+1}{m_\Delta^2(AD+2)} \left(\frac{(D-4-DA)m_\Delta\gamma^\mu\gamma^\nu}{(D-2)(DA+2)} + \frac{(D-2)(\gamma^\mu p^\nu + p^\nu\gamma^\mu)}{D-1} \right) \\ &\quad + \frac{(D-2)(A+1)\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu}{(D-1)(DA+2)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Hier läßt sich nun sehr schön erkennen, warum eine Wahl von $A = -1$ vorteilhaft für weitere Rechnungen ist, denn dann bleibt nur die erste Zeile von Gleichung (3.28) übrig. Taucht der Propagator des Delta in einer inneren Linie in einem Diagramm auf, so wird er durch $iS_0^{\mu\nu}$ beschrieben.

3.5 Das ρ -Meson

Vektormesonen sind Mesonen mit Spin $S = 1$. Das ρ -Meson mit einer Masse von ungefähr 770 MeV ist ein wichtiger Vertreter dieser Art. Es kommt in 3 Isospinzuständen (entspricht den Teilchen ρ^\pm, ρ^0) vor. In dieser Arbeit wird das ρ^0 als zusätzlicher Freiheitsgrad auf Baumgraphenniveau eingebaut, um die Beschreibung der Formfaktoren des $\gamma N \Delta$ -Übergangs besser beschreiben zu können. Die Konstruktion des zugehörigen Feynmangraphen wird in Anhang (D.2) erklärt. Es zeigt sich, daß die Berücksichtigung dieses Graphen die Beschreibung der experimentellen Daten erheblich verbessert.

Kapitel 4

Chirale Störungstheorie

Quantenfeldtheorien lassen sich im allgemeinen nicht exakt lösen, sondern lediglich in eine Störungsreihe entwickeln. Der Entwicklungsparameter ist für gewöhnlich die effektive Kopplungskonstante der zugrundeliegenden Wechselwirkung. In der QCD ist die effektive Kopplungskonstante allerdings von dem betrachteten Energiebereich stark abhängig und insbesondere für niedrige Energien nimmt sie sehr große Werte an. Somit ist hier keine Entwicklung nach der Kopplungskonstante möglich. Eine Lösung für diese Art Probleme stellen effektive Feldtheorien dar. Die in dieser Arbeit verwendete effektive Feldtheorie wird chirale Störungstheorie (χ PT) genannt. In der QCD sind die fundamentalen Freiheitsgrade die Quarks und Gluonen. In χ PT dagegen werden Hadronenzustände als effektive Freiheitsgrade interpretiert.

Zuerst wird in diesem Kapitel das Weinberg'sche Zählschema erläutert. Mit dessen Hilfe läßt sich die chirale Ordnung eines Diagramms ermitteln und somit dessen Größenordnung im Sinne einer Reihenentwicklung feststellen. Danach wird χ PT mit Mesonen als einzigen Freiheitsgraden betrachtet. In den weiteren Unterkapiteln werden danach noch Nukleonen und zuletzt die Deltaresonanz eingebaut. Die in diesem Kapitel vorgestellten Konzepte folgen im wesentlichen der Darstellung von [Sch03].

4.1 Das Weinberg'sche Zählschema

Das Konzept von effektiven Feldtheorien geht auf eine Idee von Weinberg zurück. Danach ist eine störungstheoretische Beschreibung ausgehend von einer Lagrangedichte folgendermaßen möglich: Die Lagrangedichte muß die allgemeinste mögliche Lagrangedichte sein, die alle Symmetrien der zugrundeliegenden Theorie enthält. Damit erhält man die allgemeinste S-Matrix

(Streumatrix), welche die fundamentalen Prinzipien der Quantenfeldtheorien und der angenommenen Symmetrien berücksichtigt [Wei79]. Diese Lagrangedichte enthält jedoch eine unendliche Anzahl an Termen. Um nun konkrete Berechnungen durchführen zu können, benötigt man eine Möglichkeit die Wichtigkeit der Terme beurteilen zu können. Dieses Verfahren nennt sich Weinberg'sches Zählchema. Hierbei wird das Transformationsverhalten eines Feynmandiagramms unter einer linearen Reskalierung aller externen Impulse $p_i \mapsto tp_i$ und einer quadratischen Reskalierung der leichten Quarkmassen $m_q \mapsto t^2 m_q$ betrachtet. Die sogenannte chirale Dimension eines Diagramms mit Amplitude $\mathcal{M}(p_i, m_q)$ ist nun definiert als

$$\mathcal{M}(tp_i, t^2 m_q) = t^D \mathcal{M}(p_i, m_q). \quad (4.1)$$

Somit gilt

$$D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} + 2N_L. \quad (4.2)$$

N_{2n} bezeichnet die Anzahl an Vertices, welche aus \mathcal{L}_{2n} stammen und N_L ist die Anzahl unabhängiger Schleifen. Für kleine Impulse sind somit Diagramme mit kleinem D dominant. Diese Formel gilt so nur für χ PT mit Mesonen.

4.2 Mesonen in χ PT

Man möchte nun die allgemeinste Lagrangedichte konstruieren, welche die Dynamik der Goldstonebosonen der spontanen Symmetriebrechung beschreibt. Da hier der chirale Grenzfall untersucht wird, muß diese effektive Lagrangedichte invariant unter $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ sein. Dabei werden die Pionen als Freiheitsgrade angenommen, die als Triplet unter der Untergruppe $SU(2)_V$ transformieren. Der Grundzustand soll dabei wegen der spontanen Symmetriebrechung nur invariant unter der Gruppe $SU(2)_V \times U(1)_V$ sein. Die Pionfelder werden nun durch eine speziell unitäre Matrix U dargestellt:

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\Phi(x)}{F}\right), \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^3 \tau_i \phi_i(x) = \begin{pmatrix} \pi_0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi_0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Hierbei ist F die Pionzerfallskonstante im chiralen Grenzfall, wobei $F_\pi = F(1 + \mathcal{O}(\hat{m})) = 92.4 \text{ MeV}$ (\hat{m} ist die mittlere Masse von u- und d-Quark, wobei für $SU(2)$ -Symmetrie gilt: $\hat{m} = m_u = m_d$) [GL84]. Das Transformationsverhalten für die Pionen ist nun durch

$$U \mapsto V_R U V_L^\dagger \quad (4.4)$$

gegeben, mit $(V_L, V_R) = (V_L(x), V_R(x)) \in SU(2)_L \times SU(2)_R$. Um nun eine Theorie mit äußerer Wechselwirkung zu konstruieren, benötigt man noch externe Felder um die Wechselwirkung einzubauen. Diese weiteren Bausteine sehen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} D_\mu U &= \partial_\mu U - ir_\mu U + iU l_\mu, \\ f_{\mu\nu}^R &= \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \\ f_{\mu\nu}^L &= \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu], \\ \chi &= 2B(s + ip). \end{aligned} \quad (4.5)$$

mit $r_\mu = v_\mu + a_\mu$, $l_\mu = v_\mu - a_\mu$ und $2F^2 B = -\langle \bar{q}q \rangle$. Die letzte Gleichung ist eine Beziehung für das skalare Quarkkondensat im chiralen Grenzfall. Das Transformationsverhalten dieser Felder wurde in Gleichung (2.18) angegeben. Somit hat man im mesonischen Sektor alle Bausteine zur Konstruktion der allgemeinsten Lagrangedichte. Diese Bausteine müssen nun so zu Termen kombiniert werden, daß Symmetrien der QCD (siehe Kapitel 2) korrekt berücksichtigt werden. Die Anzahl der Terme, welche mit diesen Bausteinen erzeugt werden können, ist allerdings unendlich groß. Um nun dennoch Berechnungen anstellen zu können, muß man die chirale Ordnung der Terme kennen. Diese läßt sich aus den Bausteinen bestimmen. Die chirale Ordnung der Bausteine ist im einzelnen:

$$U = \mathcal{O}(q^0), \quad D_{\mu_1} \cdots D_{\mu_i} U = \mathcal{O}(q^i), \quad f_{\mu\nu}^{R/L}, \chi = \mathcal{O}(q^2). \quad (4.6)$$

Hierbei stellt q einen kleinen Parameter (Pionmasse, Impulse) dar. Da die konstruierte Lagrangedichte ein Skalar sein muß, dürfen keine freien Lorentzindizes auftreten. Somit ist die chirale Ordnung eines Terms stets gerade, da alle Bausteine gerade Ordnung haben. Lediglich die kovariante Ableitung ist ungerader Ordnung. Es muß aber immer eine gerade Anzahl an Ableitungen vorhanden sein, damit alle Lorentzindizes kontrahiert werden. Damit läßt sich die resultierende Lagrangedichte schreiben als

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \cdots. \quad (4.7)$$

Als Beispiel sei hier nur das Ergebnis der Lagrangedichte niedrigster Ordnung genannt:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F^2}{4} \text{Tr}(D_\mu U (D^\mu U)^\dagger) + \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger). \quad (4.8)$$

Die beiden Konstanten F und B sind sogenannte Niederenergiekonstanten (B steckt in der Definition von χ). Diese lassen sich nicht aus χ PT direkt bestimmen. Sie spiegeln die Eigenschaften der zugrundeliegenden Theorie (QCD) wieder. Im Prinzip müssten sie sich daraus auch berechnen lassen. In der Praxis werden sie jedoch an experimentelle Daten angepasst.

4.3 Nukleonen in χ PT

χ PT läßt sich auch auf Baryonen bei niedrigen Energien erweitern (baryonische chirale Störungstheorie ($B\chi$ PT)). In dieser Arbeit werden nur Nukleonen (und später die Deltaresonanz) als baryonische Freiheitsgrade verwendet. Da Nukleonen Spin und Isospin $\frac{1}{2}$ haben, kann man sie gemeinsam in einem Isospinor der Form

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

darstellen. Die Einträge p und n sind dabei selbst wieder vierkomponentige Diracspinoren. Da man nun also Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen betrachtet, stehen zusätzlich die Gammamatrizen als Bausteine für die Konstruktion der Lagrangedichte zur Verfügung. Somit kann nun auch eine ungerade Anzahl an kovarianten Ableitungen in Termen der Lagrangedichte auftreten, wodurch dort auch Terme entstehen, die eine ungerade Ordnung besitzen. Damit erhält man folgende weitere Bausteine für die Konstruktion der Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi &= (\partial_\mu + \Gamma_\mu - i v_\mu^{(s)}) \Psi, \\ \Gamma_\mu &= \frac{1}{2} [u^\dagger (\partial_\mu - i r_\mu) u + u (\partial_\mu - i l_\mu) u^\dagger], \\ u_\mu &= i [u^\dagger (\partial_\mu - i r_\mu) u - u (\partial_\mu - i l_\mu) u^\dagger], \\ \chi_\pm &= u^\dagger \chi \pm u \chi^\dagger, \\ f_{\mu\nu}^\pm &= u f_{\mu\nu}^L u^\dagger \pm u^\dagger f_{\mu\nu}^R u, \\ v_{\mu\nu}^{(s)} &= \partial_\mu v_\nu^{(s)} - \partial_\nu v_\mu^{(s)}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

mit

$$u(x) = \sqrt{U(x)}, \quad (4.11)$$

wobei U durch Gleichung (4.3) definiert ist. Die chirale Ordnung dieser Ausdrücke ist

$$\begin{aligned} \Psi, \bar{\Psi} = \mathcal{O}(q^0) & \quad , \quad D_\mu \Psi = \mathcal{O}(q^0) & \quad , \quad 1, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} = \mathcal{O}(q^0), \\ \chi_\pm, f_{\mu\nu}^\pm, v_{\mu\nu}^{(s)} = \mathcal{O}(q^2) & \quad , \quad u_\mu = \mathcal{O}(q^1) & \quad , \quad \gamma_5 = \mathcal{O}(q^1), \\ (i\not{D} - m)\psi = \mathcal{O}(q^0) & \quad . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die hier angegebenen Ordnungen stellen immer die jeweils niedrigste chirale Ordnung dar. So besitzt γ_μ einen Teil der Ordnung q^0 (γ_0) und einen Teil der Ordnung q^1 (γ_i). Außerdem muß noch das Transformationsverhalten der oben angegebenen Bausteine bekannt sein. Das Verhalten unter chiralen

Transformationen lautet

$$\begin{aligned}
\Psi &\mapsto K(V_L, V_R, U)\Psi, \\
\bar{\Psi} &\mapsto \bar{\Psi}K^{-1}(V_L, V_R, U), \\
X &\mapsto K(V_L, V_R, U)XK^{-1}(V_L, V_R, U), \quad X = (u_\mu, \chi_\pm, f_{\mu\nu}^\pm), \\
v_{\mu\nu}^{(s)} &\mapsto v_{\mu\nu}^{(s)},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

wobei gilt

$$K(V_L, V_R, U) = \sqrt{V_R U V_L^\dagger}^{-1} V_R \sqrt{U}. \tag{4.14}$$

Man beachte, daß in der Funktion $K(V_L, V_R, U)$ die Goldstonebosonen enthalten sind. Nach dem Eichprinzip transformiert die kovariante Ableitung $D_\mu\Psi$ wie das Feld Ψ

$$D_\mu\Psi \mapsto K(V_L, V_R, U)D_\mu\Psi. \tag{4.15}$$

Somit erhält man z.B. die Lagrangedichte erster Ordnung [GSS88]

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\Psi} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m + \frac{g_A}{2} \gamma^\mu \gamma_5 u_\mu \right) \Psi. \tag{4.16}$$

Die Nukleonmasse m_N und die axiale Kopplungskonstante g_A sind hier jeweils im chiralen Grenzfall betrachtet.

4.4 Die Deltaresonanz in χ PT

Nun soll noch die Deltaresonanz als expliziter Freiheitsgrad berücksichtigt werden. Dazu benötigt man zuallererst das Verhalten des Feldes unter lokalen $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ -Transformationen. Dazu schaut man zunächst auf das Verhalten unter einer globalen $SU(2)_V$ -Transformation. In der Produktdarstellung ergibt sich folgendes:

$$|\psi\rangle \mapsto \psi_{i,\alpha} D(V)|i\rangle \otimes V|\alpha\rangle, \tag{4.17}$$

wobei V die Fundamentaldarstellung und $D(V)$ die dreidimensionale Darstellung von $SU(2)$ ist. Deren Matrixelemente sind in der kartesischen Basis von der Form

$$D_{ij}(V) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_i V \tau_j V^\dagger). \tag{4.18}$$

Die weitere Vorgehensweise ist analog zu der bei Nukleonen. Dazu ersetzt man

$$V \mapsto K(V_L, V_R, U) \tag{4.19}$$

mit K aus Gleichung (4.14). Damit erhält man das Transformationsverhalten unter $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie. Das Transformationsverhalten unter $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ ist folglich gegeben durch

$$\psi_{i,\alpha}^\mu \mapsto \psi'_{i,\alpha}{}^\mu = \exp[-i\Theta] \mathcal{K}_{ij,\alpha\beta} \psi_{j,\beta}^\mu. \quad (4.20)$$

Der Parameter Θ stellt die kontinuierliche $U(1)_V$ -Transformation dar. Des weiteren gilt

$$\mathcal{K}_{ij,\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_i K \tau_j K^\dagger) K_{\alpha\beta}, \quad (4.21)$$

wobei K in Gleichung (4.14) definiert wurde. Auch hier folgt aus dem Eichprinzip das Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung auf das Feld

$$D_\mu \psi \mapsto (D_\mu \psi)' = \exp[-i\Theta] \mathcal{K}(D_\mu \psi). \quad (4.22)$$

Somit erhält man

$$D_{ij,\alpha\beta}^\mu \psi_{j,\beta} = (\partial^\mu \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} - 2i\epsilon_{ijk} \Gamma_k^\mu \delta_{\alpha\beta} + \delta_{ij} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - iv^{(s)\mu} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}) \psi_{j,\beta}, \quad (4.23)$$

mit $\Gamma^\mu = \tau_i \Gamma_i^\mu$ (siehe Gleichung (4.10)). Damit hat man alle Bausteine für die in dieser Arbeit benötigte Lagrangedichte zusammen. In führender Ordnung erhält man nun für die Wechselwirkungslagrangedichte von Pionen und Deltas (siehe [HHK98])

$$\mathcal{L}_{\pi\Delta}^{(1)} = -\bar{\Psi}_\mu P^{\frac{3}{2}} \Lambda^{\mu\nu} P^{\frac{3}{2}} \Psi_\nu, \quad (4.24)$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\nu} = & (i\mathcal{D} - m_\Delta) g_{\mu\nu} + iA(\gamma_\mu D_\nu + \gamma_\nu D_\mu) \\ & + \frac{i}{2}(3A^2 + 2A + 1) \gamma_\mu \mathcal{D} \gamma_\nu + m_\Delta(3A^2 + 3A + 1) \gamma_\mu \gamma_\nu \\ & + \frac{g_1}{2} \not{u} \gamma_5 g_{\mu\nu} + \frac{g_2}{2} (\gamma_\mu u_\nu + u_\mu \gamma_\nu) \gamma_5 + \frac{g_3}{2} \gamma_\mu \not{u} \gamma_5 \gamma_\nu. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Die drei Kopplungskonstanten g_1, g_2 und g_3 scheinen zunächst unabhängig voneinander zu sein. In [Hac+05] wurde gezeigt, daß zwischen diesen Kopplungskonstanten Beziehungen gelten. Diese ergeben sich aus der Selbstkonsistenz der Theorie. Es handelt sich bei dem hier beschriebenen System um ein System mit Zwangsbedingungen (bei Spin ≥ 1 treten automatisch Zwangsbedingungen auf). Diese werden benötigt, um unphysikalische Freiheitsgrade zu eliminieren. Dadurch erhält man folgende Beziehungen zwischen den Kopplungskonstanten [WGS06]:

$$\begin{aligned} g_2(A) &= Ag_1, \\ g_3(A) &= -\frac{1 + 2A + A^2(D-1)}{D-2} g_1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Die $\pi N\Delta$ -Wechselwirkungslagrangedichte ist in führender Ordnung gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\pi N\Delta}^{(1)} = -g\bar{\Psi}_{\mu,i}P_{ij}^{\frac{3}{2}}(g^{\mu\nu} + \tilde{z}\gamma^\mu\gamma^\nu)u_{\nu,j}\Psi + h.c., \quad (4.27)$$

wobei $u_\mu = \tau_k u_{\mu,k}$ gilt und g und \tilde{z} Kopplungskonstanten sind. Auch hier erhält man aus der Forderung nach Konsistenz der Wechselwirkung eine Beziehung, nämlich

$$\tilde{z} = \frac{3A + 1}{2}. \quad (4.28)$$

4.5 Renormierung

In Quantenfeldtheorien werden physikalische Prozesse mittels Feynmandiagrammen berechnet. Dabei wird für jede Schleife (Loop) eine Integration über einen inneren Viererimpuls erzeugt. Da dieser innere Impuls beliebige Werte annehmen kann, wird über alle Impulse (von $-\infty$ bis ∞) integriert. Dadurch sind die meisten dieser Integrale divergent. Mittels Renormierung läßt sich die Divergenz derart beseitigen, daß man für das physikalische Ergebnis einen endlichen Ausdruck erhält. Es gibt jedoch kein eindeutiges Renormierungsschema, sondern theoretisch unendlich viele. Praktisch wurden im Laufe der Zeit viele verschiedene entwickelt. Wichtig für diese Schemata ist allerdings, daß sie alle für den physikalischen Prozess das gleiche Resultat erhalten.

Die prinzipielle Idee bei der Renormierung ist, den divergenten Anteil zu eliminieren, indem man die physikalischen Größen (Massen, Kopplungskonstanten, etc.) so anpasst, daß die Divergenzen in diesen Konstanten absorbiert werden. Daher betrachtet man die Größen in der Lagrangedichte als „nackte Größen“. Bei der Renormierung werden diese aufgespalten in einen physikalischen (d.h. meßbaren) Anteil und einen Anteil, der die Divergenzen weghebt. Um nun einen divergenten Anteil zu eliminieren, muß man ihn erst einmal identifizieren. In der chiralen Störungstheorie wird dabei meist das Verfahren der sogenannten dimensional Regularisierung (siehe z.B. [Vel94]) verwendet. Dabei wird eine Integration über einen Schleifenimpuls nicht in vier, sondern in D Dimensionen untersucht. Nach Ausführen der Integration entwickelt man das Ergebnis in einer Taylorreihe nach D um den Punkt $D = 4$. Auf dem Einschleifenniveau ist der divergente Anteil des Integrals dann ein Term proportional zu $\frac{1}{D-4}$. Im sogenannten modifizierten Abzugsverfahren der chiralen Störungstheorie (\widetilde{MS}) werden dann Terme proportional zu

$$R = -\frac{2}{D-4} + \gamma_E - 1 - \ln(4\pi) \quad (4.29)$$

abgezogen. Eine Übertragung von diesem Renormierungsschema auf den baryonischen Sektor der chiralen Störungstheorie ist allerdings problematisch. Es zeigt sich nämlich, daß man in den Diagrammen (Integralen) Terme erhält, die von niedrigerer chiraler Ordnung sind, als durch das Zählschema vorhergesagt [GSS88]. Dadurch ist die Konsistenz des Zählschemas zunächst zerstört.

Ein Lösungsansatz stellt die sogenannte Heavy Baryon χ PT (HB χ PT) [Ber+92] dar. Die Idee hierbei ist, den Impuls des Nukleons aufzuspalten in einen großen (Größenordnung Nukleonmasse) und einen kleinen Rest. Dabei wird eine Entwicklung in Termen $1/m$ verwendet.

Mittlerweile wurden auch Renormierungsschemata für die ursprüngliche Formulierung des baryonischen Sektors entwickelt, welche die obengenannten Probleme mit einem konsistenten Power Counting lösen. Beispiele hierfür sind das Infrarotrenormierungsverfahren (IR) [BL99] und das sogenannte extended on-mass-shell (EOMS)-Schema [Fuc+03]. In dieser Arbeit wird das sogenannte reformulierte Infrarotrenormierungsschema [SGS04], sowie das EOMS-Schema verwendet. Im folgenden werden das Infrarotrenormierungsschema und das hier verwendete reformulierte Infrarotrenormierungsschema anhand eines Beispiels motiviert. Die Darstellung folgt dabei [BL99] bzw. [Sch03]. Danach wird noch erläutert, wie die hier verwendeten Renormierungsschemata in Verbindung mit der dimensional Regularisierung angewandt werden müssen. Zuletzt wird noch das EOMS-Schema erklärt, das eine starke Ähnlichkeit mit dem reformulierten Infrarotrenormierungsschema hat.

Man betrachte das dimensional regularisierte Integral

$$I_{N\pi}(-p, 0) = i \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k-p)^2 - m_N^2 + i0^+][k^2 - M^2 + i0^+]}. \quad (4.30)$$

Mittels der Feynmanparametrisierung

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2} \quad (4.31)$$

läßt sich das Integral umschreiben und die Integration über den Schleifenimpuls durchführen. Somit erhält man

$$I_{N\pi}(-p, 0) = -\frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \int_0^1 dz [A(z)]^{(D/2)-2} \quad (4.32)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= (k-p)^2 - m_N^2 + i0^+, & b &= k^2 - M^2 + i0^+, \\ A(z) &= -p^2(1-z)z + m_N^2z + M^2(1-z) - i0^+. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Becher und Leutwyler teilen das Integral nun in einen infrarotsingulären Teil I und einen infrarotregulären Teil R auf: $I_{N\pi} = I + R$. Diese sind nun definiert durch

$$I = -\frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(2 - D/2) \int_0^\infty dz [A(z)]^{(D/2)-2} \quad (4.34)$$

und

$$R = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(2 - D/2) \int_1^\infty dz [A(z)]^{(D/2)-2}. \quad (4.35)$$

Man beachte, daß der infrarotsinguläre Anteil nun ausschließlich aus Termen besteht, die nichtganzzahlige Potenzen der kleinen Größen sind, falls die Dimension D einen nicht ganzzahligen Wert annimmt. Somit enthält er auch die nichtanalytischen Terme. Der infrarotreguläre Anteil besteht nur aus ganzzahligen Potenzen von kleinen Größen und lässt sich in einer gewöhnlichen Taylorreihe darstellen:

$$I = O(q^{D-3}) + O(q^{D-2}) + O(q^{D-1}) + \dots, \quad (4.36)$$

$$R = O(q^0) + O(q^1) + O(q^2) + \dots. \quad (4.37)$$

Im Infrarotrenormierungsschema wird nun genau dieser infrarotreguläre Anteil abgezogen. Aufgrund seiner Form läßt sich R durch die Gegenterme in der Lagrangedichte absorbieren. Es gilt jedoch zu beachten, daß sowohl I als auch R noch weitere Divergenzen beinhalten können. Die renormierten Ausdrücke (hier mit Querstrich bezeichnet) sind nun nach Becher und Leutwyler gegeben durch

$$\bar{I} = I - \bar{\lambda}\nu, \quad (4.38)$$

$$\bar{R} = R + (2 + \nu)\bar{\lambda}, \quad (4.39)$$

$$\bar{H} = H + 2\bar{\lambda}, \quad (4.40)$$

mit

$$\bar{\lambda} = \frac{m_N^{D-4}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{D-4} - \frac{1}{2} (\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1) \right), \quad (4.41)$$

$$\nu = -\frac{p^2 - m_N^2 + M^2}{p^2}, \quad (4.42)$$

womit natürlich $\overline{H} = \overline{I} + \overline{R}$ gilt. Dieses Verfahren läßt sich auf eine beliebige Anzahl von Nennern (d.h. Anzahl von Propagatoren) anwenden. Tensorintegrale höherer Stufe lassen sich nach dem Standardverfahren zu skalaren Integralen reduzieren (siehe [PV79]).

Die reformulierte Infrarotrenormierung, die auch in dieser Arbeit verwendet wird, läßt sich auch auf Ausdrücke anwenden, welche eine beliebige Anzahl von Schleifenintegralen beinhalten. Die Vorgehensweise in diesem Verfahren ist nicht eine Aufspaltung des Integrals in infrarotsingulären und infrarotregulären Anteil, sondern lediglich eine Reihenentwicklung von letzterem vom vollständigen Integral abzuziehen. Dabei wird der Integrand in der Form (4.32) betrachtet. Hier wird nun eine Taylorreihenentwicklung dieses Integranden nach kleinen Parametern (d.h. $p^2 - m_N^2, M^2$) durchgeführt und Summation und Integration vertauscht. Nach [SGS04] erhält man somit genau den infrarotregulären Anteil, wenn man alle (unendlich vielen) Terme der Reihe aufsummiert. In der Praxis läßt sich solch eine Reihenentwicklung nur bis zu einer gegebenen Ordnung durchführen. Da aber alle Berechnungen in chiraler Störungstheorie nur bis auf eine gewählte Ordnung exakt sind, erhält man nur Fehler in Termen höherer Ordnung. Bevor man den so ermittelten infrarotregulären Anteil vom Schleifenintegral subtrahieren kann, müssen auch hier noch die Divergenzen entfernt werden.

Ein weiterer Aspekt der Renormierung entsteht dadurch, daß alle in dieser Arbeit vorgenommenen Rechnungen D -dimensional durchgeführt wurden. Man kann nun nicht einfach am Ende der Rechnungen $D = 4$ einsetzen. Dies soll nun auch an einem einfachen Beispiel demonstriert werden. In den Rechnungen treten Schleifenintegrale mit beliebigen Koeffizienten auf. Dabei hängen sowohl die Integrale, als auch die Koeffizienten von der Dimension D ab. Man betrachte nun das Beispiel

$$D \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2 + i0^+}. \quad (4.43)$$

Dieses Integral läßt sich nun in einer Potenzreihe nach seiner (Raumzeit)-Dimension D entwickeln:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2 + i0^+} = \frac{A}{D-4} + B + C(D-4) + \dots \quad (4.44)$$

Nimmt man nun den Ausdruck (4.43), setzt für das Integral die Reihenentwicklung ein und führt eine Äquivalenzumformung durch, so erhält man

$$[(D-4)+4] \frac{A}{D-4} + B + C(D-4) + \dots = A + 4 \frac{A}{D-4} + D(B + C(D-4) + \dots). \quad (4.45)$$

Nun wählt man für die Dimension $D = 4$ und erhält somit

$$D \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2 + i0^+} \stackrel{D \rightarrow 4}{=} A + 4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i0^+} + \mathcal{O}(D-4). \quad (4.46)$$

Hätte man in Gleichung (4.43) gleich $D = 4$ gewählt, so wäre ein Fehler entstanden, da dann der Term A (sogenannter zusätzlicher endlicher Anteil) wie er in Gleichung (4.46) entsteht, nicht berücksichtigt worden wäre. Nun muß man nur noch den Wert von A kennen. Dieser wurde z.B. in [HP99] für alle hier relevanten Integrale angegeben.

Die Reihenfolge der Schritte ist wichtig bei der Anwendung der Renormierung aufgrund der dimensional Abhängigkeit der Koeffizienten der Integrale. Um die Gültigkeit der Ward-Identitäten zu erhalten und somit die Rechnungen korrekt durchzuführen, müssen die oben erläuterten Schritte in folgender Reihe durchgeführt werden. Zuerst muß der infrarotreguläre Anteil des Integrals bestimmt werden. Divergenzen dieses Anteils müssen als nächstes entfernt werden. Der divergenzfreie infrarotreguläre Anteil wird nun vom ursprünglichen Integral abgezogen. Erst danach darf der zusätzliche endliche Anteil des Integrals mitberücksichtigt werden und für die Dimension $D = 4$ eingesetzt werden.

Beim sogenannten EOMS-Renormierungsschema werden gezielt diejenigen Terme in den Diagrammen abgezogen, welche das Zählschema verletzen. Diese lassen sich durch eine Entwicklung der Terme eines Diagramms in kleinen Größen (Massen, Impulse) schon identifizieren, ohne die Integration vorher ausführen zu müssen. Da es sich bei den zählschemaverletzenden Termen um Polynome handelt, lassen diese sich durch eine passende Umformulierung der Wechselwirkungslagrangedichten eliminieren. Hier nun auch ein kurzes Beispiel, bei dem wieder das Integral aus Gleichung (4.30) verwendet wird. Eine

Reihenentwicklung sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l,j=0}^{\infty} \frac{(p^2 - m_N^2)^l (M^2)^j}{l!j!} \left[\left(\frac{1}{2p^2} p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right)^l \left(\frac{\partial}{\partial M^2} \right)^j \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{[(k-p)^2 - m_N^2 + i0^+][k^2 - M^2 + i0^+]} \right] \Big|_{p^2=m_N^2, M^2=0} \\
= & \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)(k^2 + i0^+)} \Big|_{p^2=m_N^2} \\
& + M^2 \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)(k^2 + i0^+)^2} \Big|_{p^2=m_N^2} \\
& + (p^2 - m_N^2) \left[\frac{1}{2m_N^2} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)^2} \right. \\
& - \frac{1}{2m_N^2} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)(k^2 + i0^+)} \\
& \left. - \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)^2(k^2 + i0^+)} \right] \Big|_{p^2=m_N^2} + \dots \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Führt man nun die Integration aller Terme aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
R_{N\pi} = & - \frac{m_N^{D-4} \Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2} (D-3)} \left[1 - \frac{p^2 - m_N^2}{2m_N^2} \right. \\
& \left. + \frac{(D-6)(p^2 - m_N^2)^2}{4m_N^4 (D-5)} + \frac{(D-3)M^2}{2m_N^2 (D-5)} + \dots \right]. \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Wie man sieht, ist der erste Term dieser Reihe von niedrigerer chiraler Ordnung, als durch das Power Counting bestimmt. Somit muß dieser Term durch entsprechende Gegenterme in der Lagrangedichte absorbiert werden.

Nun kann man ein konsistentes Zählschema angeben. In den Diagrammen wird nun ein Vertex, der aus einer Lagrangedichte m -ter Ordnung stammt als q^m gezählt (q stellt eine kleine Größe, d.h. kleine Massen und Impulse dar). Somit werden die Pionmasse und kleine Impulse als $\mathcal{O}(q^1)$ gezählt. Die Massendifferenz $m_\Delta - m_N$ wird auch als $\mathcal{O}(q^1)$ gezählt. Weiterhin zählt ein Pionpropagator als $\mathcal{O}(q^{-2})$ und Nukleon- bzw. Deltapropagator als $\mathcal{O}(q^{-1})$. Zuletzt wird noch eine Integration über einen Schleifenimpuls in D Dimensionen als $\mathcal{O}(q^D)$ gezählt.

Kapitel 5

Formfaktoren der Deltaresonanz

In einem einfachen nichtrelativistischen Bild dienen Formfaktoren dazu, die räumliche Struktur eines Teilchens zu beschreiben. In dieser Arbeit geht es darum, die sogenannten $\gamma N \rightarrow \Delta$ -Übergangsformfaktoren zu untersuchen. Der Übergang zwischen einem Nukleon und der Deltaresonanz wird dabei größtenteils durch einen magnetischen Dipolformfaktor vermittelt. Es zeigt sich jedoch, daß auch ein elektrischer Quadrupolformfaktor und ein Coulomb-Quadrupolformfaktor zu dem Übergang beitragen. Deren Auftreten ist ein Indiz dafür, daß die Deltaresonanz nicht sphärisch, sondern leicht deformiert ist [Ber02, GH06]. Durch Untersuchung der Formfaktoren läßt sich diese Deformation also beschreiben.

In diesem Kapitel wird zuerst der übergeordnete Prozess der Pionelektroproduktion vorgestellt. Danach werden die hier untersuchten Formfaktoren definiert. Als nächstes wird der quantenfeldtheoretische Prozess, der dafür berechnet wurde, vorgestellt und alle zu diesem Prozess gehörigen Diagramme in chiraler Störungsrechnung bis Ordnung drei präsentiert. Auch wird kurz erläutert, wie man die Vollständigkeit und Richtigkeit dieser Diagramme und deren Berechnung zeigen kann. Danach folgt eine allgemeine Darstellung der Ergebnisse. Für diese werden die Ergebnisse zweier verschiedener Renormierungsschemata gezeigt und miteinander sowie mit den Rechnungen von [GH06], [PV07] und dem MAID2007-Modell [DKT07] verglichen. Alle Ergebnisse beziehen sich hierbei auf den Prozess

$$\gamma + p \rightarrow \Delta^+. \quad (5.1)$$

Die numerischen Werte der Formfaktoren für $\gamma + n \rightarrow \Delta^0$ sind identisch, da der Clebsch-Gordan-Koeffizient aus der Isospinstruktur gleich ist (siehe Anhang C). Zuletzt wird noch überprüft, ob die Ergebnisse das Siegert-Theorem

erfüllen, das eine Aussage über die Formfaktoren in einem bestimmten Grenzwert macht.

5.1 Pionelektroproduktion

Der in dieser Arbeit untersuchte Prozess ist ein Subprozess der sogenannten Pionelektroproduktion:

$$eN \rightarrow e'\pi N'. \quad (5.2)$$

In Abbildung 5.1 ist eine der Diagrammklassen abgebildet, die zu diesem

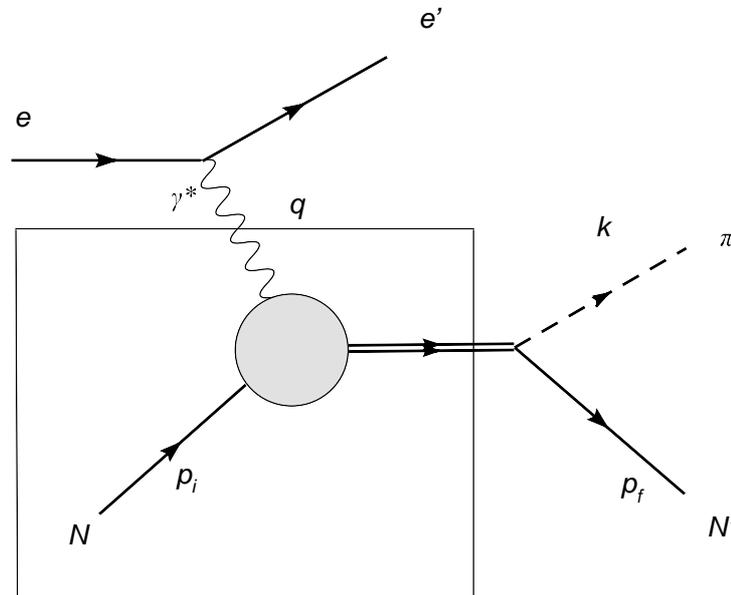


Abbildung 5.1: Eine Prozessklasse der Pionelektroproduktion. Eingerahmt ist der in dieser Arbeit untersuchte Diagrammteil.

Prozess gehört. Hierbei wird von einer Einphotonaustauschnäherung ausgegangen. Liegt die Schwerpunktsenergie sehr nahe bei der Masse der Deltaresonanz, so dominiert der Beitrag dieser Diagrammklassen den Prozess (sogenannte Poldominanz). Im folgenden soll nun kurz erläutert werden, wie man physikalische Größen (Formfaktoren) aus dem Subprozess erhalten kann, ohne den kompletten Prozess der Pionelektroproduktion rechnen zu müssen. Eine symbolische Parametrisierung des Übergangsmatrixelementes der Reaktion aus Gleichung (5.2) ist von der Form:

$$\mathcal{M} = \text{Vertex 1} \times i \text{ Propagator} \times \text{Vertex 2} \quad (5.3)$$

Dabei beschreibt Vertex 1 die Kopplung zwischen Elektron und abgestrahltem Photon. Vertex 2 soll symbolisch für alle Diagramme, die zu $\langle N'\pi | J^\mu(0) | N \rangle$ beitragen, stehen. Dieser Vertex repräsentiert, im Rahmen der Störungstheorie, alle Subprozesse, die beitragen können. Die Amplitude läßt sich nach den Feynmanregeln folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \underbrace{i\bar{u}(k_f, s_f)\gamma^\nu u(k_i, s_i)}_{\frac{e^\nu}{q^2}} \left(-i\frac{g_{\nu\mu}}{q^2 + i\epsilon} + \text{Eichterme}\right) (-ie\langle N'\pi | J^\mu(0) | N \rangle) \\ &= i\epsilon^\mu \underbrace{(-e\langle N'\pi | J^\mu(0) | N \rangle)}_{\mathcal{M}^\mu}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Eichterme werden im folgenden nicht weiter berücksichtigt. Die Größen $k_{i,f}$ und $s_{i,f}$ stehen hierbei für die auftretenden Impulse und Spins des Elektrons. In der Literatur werden nun im allgemeinen folgende dimensionslose kinematische Variablen eingeführt:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{(p_i + p_f) \cdot k}{2m_N^2} = \frac{(p_i + p_f) \cdot q}{2m_N^2}, \\ \nu_1 &= \frac{q \cdot k}{2m_N^2}, \\ \nu_2 &= \frac{q^2}{m_N^2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Somit ergibt sich folgende Parametrisierung für \mathcal{M}^μ (vergleiche z.B. [DT92, SK91]):

$$\mathcal{M}^\mu = \frac{i}{2m_N^2} \sum_{i=1}^8 \bar{u}(p_f, s_f) Q_i^\mu A_i(\nu, \nu_1, \nu_2) u(p_i, s_i). \quad (5.6)$$

Die Q_i^μ sind verschiedene Lorentzstrukturen, die sich aus den gegebenen Größen kombinieren lassen. Zugleich stellen sie die maximale Anzahl an benötigten Strukturen dar. Jede weitere Lorentzstruktur läßt sich z.B. wegen Impulserhalt und durch die Clifford-Algebra auf die ursprünglichen zurückführen. Stromerhalt liefert als Bedingung

$$q_\mu \mathcal{M}^\mu = 0. \quad (5.7)$$

Wendet man diese Bedingung auf Gleichung (5.6) an, so verringert sich die Anzahl der unabhängigen Objekte auf sechs. Diese Anzahl ist auch konsistent mit einer Abzählung mittels Spinprojektionen:

$$\frac{1}{2}(s_i \times s_\gamma \times s_f) = \frac{1}{2}(2 \times 3 \times 2) = 6. \quad (5.8)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ wird wegen der Berücksichtigung der Parität benötigt. Man beachte des weiteren, daß für Photopionproduktion lediglich vier unabhängige Objekte benötigt werden. Im hadronischen Schwerpunktsystem läßt sich eine weitere Parametrisierung mittels der sogenannten CGLN-Amplituden [Che+57] angeben. Dazu wird folgendes Objekt benötigt

$$a^\mu := \epsilon^\mu - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\epsilon}}{q_0^2} q^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\epsilon} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\epsilon}}{q_0^2} \vec{q} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Das Übergangsmatrixelement läßt sich nun darstellen als

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & i \frac{4\pi W}{m_N} \chi_f^\dagger \left(i \vec{\sigma} \cdot \vec{a}_\perp F_1 \right. \\ & + (\vec{\sigma} \cdot \hat{k})(\vec{\sigma} \cdot (\hat{q} \times \vec{a}_\perp)) F_2 \\ & + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{q})(\vec{a}_\perp \cdot \hat{k}) F_3 \\ & + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{k})(\vec{a}_\perp \cdot \hat{k}) F_4 \\ & + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{q})(\vec{a}_\parallel \cdot \hat{q}) F_5 \\ & \left. + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{k})(\vec{a}_\parallel \cdot \hat{q}) F_6 \right) \chi_i. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hierbei stellt W die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem dar und $\chi_{i,f}$ sind die Paulispinoren der Anfangs- und Endzustände. Die F_i sind nun Funktionen von drei unabhängigen kinematischen Variablen (z.B. q^2 , W und einem Streuwinkel θ). Im Falle der Photopionproduktion verschwinden F_5 und F_6 und die restlichen Funktionen sind nur noch von zwei kinematischen Variablen abhängig. Im allgemeinen lassen sich die F_i nun in einer Multipolentwicklung durch sogenannte Multipolamplituden und den Legendre-Polynomen

beschreiben (dadurch wird die Winkelabhängigkeit absepariert):

$$\begin{aligned}
F_1(q^2, W, \cos(\theta)) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ [lM_{l+}(q^2, W) + E_{l+}(q^2, W)] P'_{l+1}(\cos(\theta)) \right. \\
&\quad \left. + [(l+1)M_{l-}(q^2, W) + E_{l-}(q^2, W)] P'_{l-1}(\cos(\theta)) \right\}, \\
F_2(q^2, W, \cos(\theta)) &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ (l+1)M_{l+}(q^2, W) + lM_{l-}(q^2, W) \right\} P'_l(\cos(\theta)), \\
F_3(q^2, W, \cos(\theta)) &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ [E_{l+}(q^2, W) - M_{l+}(q^2, W)] P''_{l+1}(\cos(\theta)) \right. \\
&\quad \left. + [E_{l-}(q^2, W) + M_{l-}(q^2, W)] P''_{l-1}(\cos(\theta)) \right\}, \\
F_4(q^2, W, \cos(\theta)) &= \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ M_{l+}(q^2, W) - E_{l+}(q^2, W) - M_{l-}(q^2, W) \right. \\
&\quad \left. - E_{l-}(q^2, W) \right\} P''_l(\cos(\theta)), \\
F_5(q^2, W, \cos(\theta)) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1)L_{l+}(q^2, W) P'_{l+1}(\cos(\theta)) - lL_{l-}(q^2, W) P'_l(\cos(\theta)) \right\}, \\
F_6(q^2, W, \cos(\theta)) &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ lL_{l-}(q^2, W) - (l+1)L_{l+}(q^2, W) \right\} P'_l(\cos(\theta)). \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Unterhalb der Zwei-Pion-Schwelle existiert eine besondere Beziehung zwischen den γN - und πN -Kanälen, d.h. zwischen den Reaktionen

$$\begin{aligned}
\pi + N &\rightarrow \pi + N, & \pi + N &\rightarrow \gamma + N, \\
\gamma + N &\rightarrow \pi + N, & \gamma + N &\rightarrow \gamma + N,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

da ein angeregtes Nukleon hier nur durch Aussenden eines Pions oder Photons zerfallen kann. Die S-Matrix in diesem kinematischen Bereich ist von der Form

$$S_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} S_{\pi\pi} & S_{\gamma\pi} \\ S_{\pi\gamma} & S_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

wobei $S_{\alpha\beta}$ für $N + \beta \rightarrow N + \alpha$ ($\alpha, \beta \in \gamma, \pi$) steht. Das Watson-Theorem [GW67] liefert aufgrund der Unitarität und Zeitumkehrinvarianz der S-Matrix folgende Form für die Elemente (siehe hierfür [DT07]):

$$S_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\eta^2} e^{2i\delta_{\pi N}} & i\eta e^{i(\delta_{\pi N} + \delta_{\gamma N})} \\ i\eta e^{i(\delta_{\pi N} + \delta_{\gamma N})} & \sqrt{1-\eta^2} e^{2i\delta_{\gamma N}} \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Hierbei stellt η ein Maß für die Inelastizität der Reaktion dar. $\delta_{\pi N}$ und $\delta_{\gamma N}$ sind Pion-Nukleon- bzw. Comptonstreuphasen. Aus der Gestalt der S-Matrix läßt sich die entsprechende T-Matrix leicht herleiten. Dadurch läßt sich eine Beziehung für die Multipolformfaktoren aus Gleichung (5.11) herstellen. So gilt z.B.

$$\mathcal{M}_{1+}^{3/2}(W, q^2) = \pm e^{i\delta_{1+}^{3/2}(W)} |\mathcal{M}_{1+}^{3/2}(W, q^2)|. \quad (5.15)$$

Entscheidend an dieser Formel ist nun, daß der Phasenfaktor $e^{i\delta_{1+}^{3/2}(W)}$ nur vom Pion-Nukleon-Endzustand abhängt, d.h. für feste Werte von l und J für die zugehörigen Multipole gleich ist.

5.2 Multipolformfaktoren

Die in dieser Arbeit untersuchten Formfaktoren dienen zur Beschreibung des Prozesses

$$\gamma + N \rightarrow \Delta, \quad (5.16)$$

d.h. ein Nukleon wechselwirkt mit einem Photon¹, so daß die Deltaresonanz erzeugt wird. Die Klasse möglicher Diagramme, welche diese Wechselwirkung beschreiben, ist in Abbildung 5.2 zu sehen. Die in der Abbildung verwendete

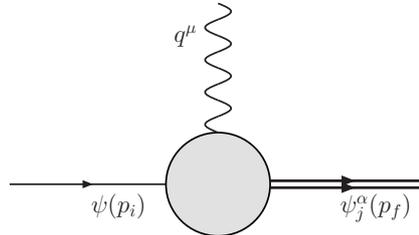


Abbildung 5.2: Diagrammklasse zur Beschreibung des γN - Δ -Übergangs.

Konvention wird auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendet:

- Das einlaufende Nukleon trägt den Impuls p_i .
- Das Photon trägt den Impuls q und hat den Lorentzindex μ .
- Das Delta trägt den Impuls p_f , hat einen Lorentzindex α und einen Isospinindex j .
- Sowohl das Nukleon, als auch das Delta befinden sich auf der Massenschale, d.h. $p_i^2 = m_N^2$, $p_f^2 = m_\Delta^2$.

¹Das Photon kann sowohl virtuell als auch reell sein.

Der Prozess zur Erzeugung des Deltas wird durch folgendes Matrixelement beschrieben

$$\langle \Delta | J^\mu(0) | N \rangle = \bar{\psi}_{\alpha,j}(p_f) D_j^{\alpha\mu} \psi(p_i). \quad (5.17)$$

Der Stromoperator ist dabei definiert als

$$J^\mu(x) = \frac{2}{3} \bar{u}(x) \gamma^\mu u(x) - \frac{1}{3} \bar{d}(x) \gamma^\mu d(x) + \dots \quad (5.18)$$

wobei die Beiträge der schweren Quarks (dargestellt durch ...) nicht berücksichtigt werden. Der Tensor $D_j^{\alpha\mu}$ besteht aus allen für diese Diagramme möglichen Lorentzstrukturen. Der Isospinindex wird im weiteren Verlauf unterdrückt. In Anhang B wird gezeigt, daß man das Matrixelement durch genau vier unabhängige Lorentzstrukturen parametrisieren kann und wie diese aussehen. Überdies wird der Stromerhalt verwendet, um eine Zwangsbedingung zwischen den Koeffizienten dieser Strukturen herzuleiten, da gilt

$$q_\mu \langle \Delta | J^\mu(0) | N \rangle |_{p_f^2 = m_\Delta^2} = 0. \quad (5.19)$$

In dieser Arbeit wird $D^{\alpha\mu}$ somit folgendermaßen parametrisiert:

$$D^{\alpha\mu} = D_1 g^{\alpha\mu} \gamma_5 + D_2 q^\alpha p_i^\mu \gamma_5 + D_3 q^\alpha q^\mu \gamma_5 + D_4 q^\alpha \gamma^\mu \gamma_5, \quad (5.20)$$

wobei die D_i durch die Feynmandiagramme bestimmt sind.

Im Experiment hingegen geht es darum, Multipolamplituden, die durch Helizitätsamplituden ausgedrückt werden, zu bestimmen. In [JS72] wurde erstmals eine Beziehung zwischen den experimentellen und den theoretischen Größen hergeleitet. Danach erhält man folgende theoretische Beschreibung für die Matrix $D^{\alpha\mu}$:

$$D^{\alpha\mu} = G_M^*(q^2) C_1^{\alpha\mu} + G_E^*(q^2) C_2^{\alpha\mu} + G_C^*(q^2) C_3^{\alpha\mu}. \quad (5.21)$$

G_M^* ist der magnetische, G_E^* der elektrische und G_C^* der Coulomb-Formfaktor. Die $C_i^{\alpha\mu}$ ($i = 1, 2, 3$) bezeichnen jeweils magnetische Dipol-, elektrische Quadrupol- und Coulomb Quadrupol-Kovarianten. Deren konkretes Aussehen, sowie die Beziehung zu den Ergebnissen der Feynmandiagramme wird in Kapitel 5.4 erläutert.

5.3 Diagramme

Die Diagramme, welche den Prozess $\gamma + N \rightarrow \Delta$ beschreiben, haben die in Abbildung 5.2 dargestellte Form. Um nun physikalische Ergebnisse zu erhalten, muß man sich alle theoretisch denkbaren Diagramme überlegen, die zu

dieser Klasse gehören. Dies sind im allgemeinen unendlich viele, da es sich ja um eine Entwicklung in einer Störungsreihe handelt. Durch das in Kapitel 4.1 erläuterte Zählverfahren kann man jedoch die chirale Ordnung eines Diagramms ermitteln. Damit überlegt man sich alle Diagramme, die bis zur gewählten Ordnung in chiraler Störungstheorie beitragen. Somit erhält man als einfachstes Diagramm das sogenannte Baumdiagramm (Abbildung 5.3). Weiterhin erhält man in chiraler Ordnung drei zwei Arten von Diagrammen,

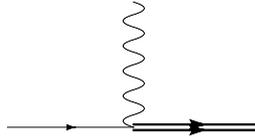


Abbildung 5.3: Baumdiagramm (Diagramm 1)

die sich dadurch unterscheiden, ob ein Nukleon (einfache durchgezogene Linie) oder ein Delta (doppelte durchgezogene Linie) als innere Linie propagiert (siehe Abbildungen 5.3 bis 5.11)². Es zeigt sich, daß die Ergebnisse der Diagramme ohne Deltapropagator wesentlich einfacher sind, als diejenigen der Diagramme mit Deltapropagator. So trägt z.B. das Diagramm zwei gar nicht bei. Man beachte, daß das Baumdiagramm erst in chiraler Ordnung zwei und drei beiträgt. Da hierfür aber keine Lagrangedichte vorliegt, wird die Struktur dieser Beiträge durch die allgemeinste mögliche Struktur parametrisiert. Dies wird in Anhang D erläutert.

²Die gestrichelte Linie repräsentiert ein Pion und die gewellte Linie ein Photon.

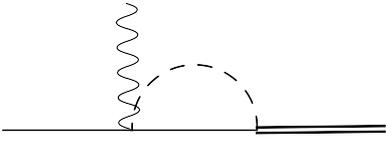


Abbildung 5.4: Diagramm 2

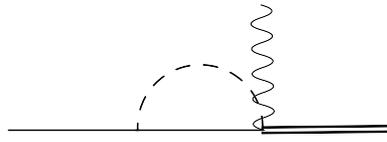


Abbildung 5.5: Diagramm 3

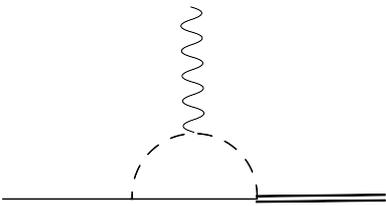


Abbildung 5.6: Diagramm 4

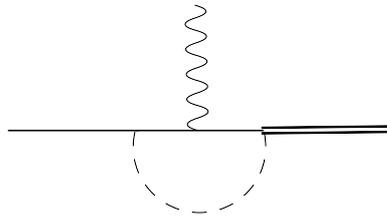


Abbildung 5.7: Diagramm 5

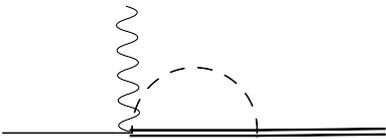


Abbildung 5.8: Diagramm 6

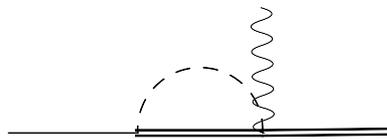


Abbildung 5.9: Diagramm 7

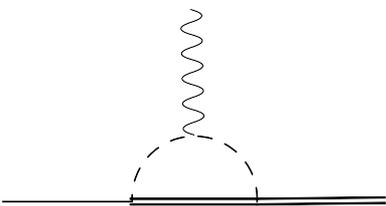


Abbildung 5.10: Diagramm 8

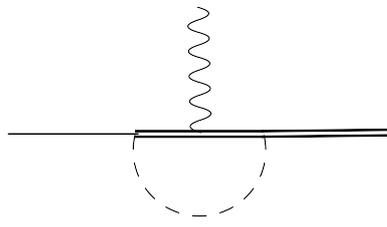


Abbildung 5.11: Diagramm 9

Wie in Abschnitt 3.5 bereits erwähnt, wurde in dieser Arbeit zusätzlich untersucht, inwieweit ein Beitrag des ρ^0 -Mesons auf Baumniveau die Be-

schreibung der Formfaktoren verbessern kann. Der zugehörige Feynmangraph ist in Abbildung 5.12 zu sehen.

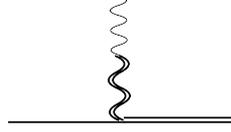


Abbildung 5.12: Beitrag des ρ^0 -Mesons auf Baumniveau (die doppelte gewellte Linie stellt das ρ^0 dar).

5.4 Bestimmung der Formfaktoren

Sind alle Diagramme berechnet, so hat man die Koeffizienten D_i aus Gleichung (5.20) bestimmt. Nun müssen aus diesen Koeffizienten die physikalischen Formfaktoren abgeleitet werden. In [GH06] wurde das Matrixelement für den Prozess $\Delta \rightarrow N + \gamma$ beschrieben durch

$$i\mathcal{M}_{\Delta \rightarrow N\gamma}^\mu = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e}{2m_N} \bar{\psi}(p_i) \gamma_5 [G_1((m_\Delta + m_N)g^{\alpha\mu} - q^\alpha \gamma^\mu) + \frac{G_2}{2m_N}(p_i^\mu q^\alpha - p_i q g^{\alpha\mu}) + \frac{G_3}{2(m_\Delta - m_N)}(q^\alpha q^\mu - q^2 g^{\alpha\mu})] \psi^\alpha(p_f). \quad (5.22)$$

Da hier das Matrixelement für $\gamma + N \rightarrow \Delta$ benötigt wird, muß man das hermitesch konjugierte obiger Gleichung betrachten. Durch Gleichsetzen des hermitesch konjugierten Matrixelements mit Gleichung (5.20) kann man die Strukturen G_1, G_2 und G_3 durch Koeffizientenvergleich bestimmen:

$$D_1 = -i\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e}{2m_N} [G_1^\dagger(m_\Delta + m_N) - \frac{G_2^\dagger}{2m_N} p_i \cdot q - \frac{G_3^\dagger}{2(m_\Delta - m_N)} q^2], \quad (5.23)$$

$$D_2 = -i\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e}{2m_N} \frac{G_2^\dagger}{2m_N}, \quad (5.24)$$

$$D_3 = -i\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e}{2m_N} \frac{G_3^\dagger}{2(m_\Delta - m_N)}, \quad (5.25)$$

$$D_4 = i\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e}{2m_N} G_1^\dagger. \quad (5.26)$$

Aus [GH06] erhält man nun folgende Beziehung zu den physikalischen Formfaktoren:

$$\begin{aligned}
G_M^* &= \frac{m_N}{3(m_N + m_\Delta)} \left\{ [(3m_\Delta + m_N)(m_\Delta + m_N) - q^2] \right. \\
&\quad \times \frac{G_1^\dagger}{2m_N m_\Delta} - (m_\Delta^2 - m_N^2 - q^2) \frac{G_2^\dagger}{4m_N^2} - \frac{q^2 G_3^\dagger}{2m_N(m_\Delta - m_N)} \left. \right\}, \\
G_E^* &= \frac{m_N}{3(m_N + m_\Delta)} \left\{ (m_\Delta^2 - m_N^2 + q^2) \frac{G_1^\dagger}{2m_N m_\Delta} \right. \\
&\quad \left. - (m_\Delta^2 - m_N^2 - q^2) \frac{G_2^\dagger}{4m_N^2} - \frac{q^2 G_3^\dagger}{2m_N(m_\Delta - m_N)} \right\}, \\
G_C^* &= \frac{2m_N}{3(m_N + m_\Delta)} \left\{ \frac{m_\Delta G_1^\dagger}{m_N} - (m_\Delta^2 + m_N^2 - q^2) \frac{G_2^\dagger}{4m_N^2} \right. \\
&\quad \left. - (m_\Delta^2 - m_N^2 + q^2) \frac{G_3^\dagger}{4m_N(m_\Delta - m_N)} \right\}. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Wie man nun sieht, müssen aus den Koeffizienten D_i zuerst die G_i bestimmt werden um G_M^* , G_E^* und G_C^* zu erhalten. Mit den Gleichungen (5.23) bis (5.26) hat man allerdings vier Gleichungen, die nach drei Variablen gelöst werden sollen. Wegen des Stromerhalts sind jedoch nur drei der vier Gleichungen linear unabhängig. Dadurch kann man drei beliebige Gleichungen auswählen und nach den G_i auflösen. Die einfachste Lösung ist dabei folgende:

$$\begin{aligned}
G_1^\dagger &= -i\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2m_N}{e} D_4, \\
G_2^\dagger &= i\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2m_N}{e} 2m_N D_2, \\
G_3^\dagger &= i\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2m_N}{e} 2(m_\Delta - m_N) D_3. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

5.5 Ergebnisse

Im folgenden wird erläutert, wie die Konstanten in den Baumbeiträgen bestimmt wurden. Danach werden die daraus gewonnenen Resultate dargestellt, verglichen und diskutiert.

Folgende Größen lassen sich aus den Formfaktoren ableiten, welche Gegenstand experimenteller und theoretischer Untersuchungen sind (W ist die

Schwerpunktsenergie):

$$\begin{aligned} R_{EM} &= \operatorname{Re} \left(\frac{E_{1+}^{I=3/2}(W = m_\Delta)}{M_{1+}^{I=3/2}(W = m_\Delta)} \right) \\ &\approx -\operatorname{Re} \left(\frac{G_E^*}{G_M^*} \right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} R_{SM} &= \operatorname{Re} \left(\frac{S_{1+}^{I=3/2}(W = m_\Delta)}{M_{1+}^{I=3/2}(W = m_\Delta)} \right) \\ &\approx -\frac{\sqrt{((m_\Delta + m_N)^2 - q^2)((m_\Delta - m_N)^2 - q^2)}}{4m_\Delta^2} \operatorname{Re} \left(\frac{G_C^*}{G_M^*} \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Die jeweils zweite Zeile der Gleichungen wurde aus [GH06] übernommen. Des weiteren findet sich in der Literatur eine zweite Definition der Formfaktoren von Ash [Ash+67]. Sie ist mit der hier verwendeten Definition von Jones und Scadron folgendermaßen verknüpft:

$$G_{M,E,C}^{*Ash} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{(m_N + m_\Delta)^2}}} G_{M,E,C}^{*JS}. \quad (5.31)$$

Um die Koeffizienten der Baumbeiträge zu bestimmen, wurde ein nichtlinearer Fit mit dem Programm *Mathematica* und der darin vorhandenen Routine *NonlinearRegress* verwendet. Dieser Fit versucht das sogenannte χ^2 der anzupassenden Funktion zu minimieren. Ein generelles Problem eines solchen Fits ist, daß es sich bei dem Minimum auch um ein lokales Minimum des χ^2 handeln kann. Um dieses Problem in den Griff zu bekommen, kann man das Programm mit beliebigen Startparametern durchlaufen lassen. Aus diesem Grunde wurden für alle Fits jeweils 1000 Durchläufe mit zufällig erzeugten Startwerten (aus einem physikalisch sinnvollen Intervall) durchgeführt und das jeweils beste Ergebnis ausgewählt. Angepaßt wurde dabei gleichzeitig an Meßdaten zu R_{EM} und $|G_M^*|$. Die verwendeten Daten sind in Tabelle 5.1 aufgelistet. In Tabelle 5.2 sind zusätzlich die verwendeten Zahlenwerte aller weiteren hier auftauchenden Parameter angegeben. Man beachte außerdem, daß der Zusammenhang zwischen dem rein reellen experimentellen Wert von G_M^* und dem komplexwertigen theoretisch berechneten Wert nicht bekannt ist. Es zeigt sich jedoch, daß der Imaginärteil von G_M^* wesentlich kleiner ist als der Realteil, so daß $|G_M^*| \approx \operatorname{Re}(G_M^*)$ ist.

G_M^{*Ash}	$Q^2 = -q^2 [GeV^2]$	Mefswert	Quelle
	0	3.02 ± 0.05	[Bec+00]
	0.15	2.088 ± 0.084	[Bät+72]
	0.2	1.784 ± 0.053	[Bät+72]
	0.3	1.409 ± 0.042	[Bät+72]
R_{EM}			
	0	$(-2.5 \pm 0.3)\%$	[Bec+00]
	0.06	$(-2.28 \pm 0.35)\%$	[Sta+06]
	0.126	$(-2.1 \pm 0.2)\%$	[Mer+01]

Tabelle 5.1: Experimentelle Daten für Fits

M [GeV]	m_N [GeV]	m_Δ [GeV]	M_ρ [GeV]
0.1396	0.9383	1.21	0.77
F_π [GeV]	g_A	g	g_1
0.0924	1.267	-1.127	2.281

Tabelle 5.2: Verwendete Zahlenwerte für physikalische Größen (M: Pionmasse, m_N : Nukleonmasse, m_Δ : Deltamasse, M_ρ : Rhomasse, F_π : Pionzerfallskonstante, g_A : Axialvektorkopplungskonstante, g: $\pi N\Delta$ -Kopplungskonstante, g_1 : $\pi\Delta$ -Kopplungskonstante)

Die Parameter A , B aus Gleichung (D.4) und A_2 , B_2 aus Gleichung (D.7) sind nun in Tabelle 5.3 aufgelistet. Fit I stellt jeweils den Fit lediglich an den Baumbeitrag des $\gamma N\Delta$ -Übergangs dar. Fit II berücksichtigt zusätzlich den Beitrag des Baumdiagramms mit dem ρ^0 -Meson als Zwischenstufe. Das jeweils ermittelte χ^2 ist auch angegeben.

Renormierungsschema	A [GeV]	B [GeV]	A_2 [GeV ³]	B_2 [GeV ³]	reduziertes χ^2
EOMS Fit I	-2.17	5.05	0	0	107
EOMS Fit II	3.59	10.74	4.32	4.15	0.14
IR reformuliert Fit I	-1.46	-13.61	0	0	79
IR reformuliert Fit II	3.57	-6.73	3.72	4.92	0.18

Tabelle 5.3: Fitergebnisse der Parameter der Baumbeiträge

Auffällig in dieser Tabelle sind die großen Werte für das reduzierte χ^2 , wenn der Beitrag des ρ^0 -Meson-Diagramms nicht berücksichtigt wird. Im Vergleich

dazu haben die jeweiligen Fits, welche diesen Beitrag berücksichtigen ein sehr kleines reduziertes χ^2 . Dies ist schon ein Indiz für die Tatsache, daß zur Beschreibung der Formfaktoren mehr Parameter benötigt werden, als eine einfache Rechnung in chiraler Ordnung drei ohne weitere Freiheitsgrade liefert. Im folgenden werden nun die einzelnen Ergebnisse für die Formfaktoren präsentiert. Man beachte dabei, daß alle Funktionen in Abhängigkeit des (raumartigen) Photonimpulses gezeigt werden, d.h. hier wird $Q^2 = -q^2$ verwendet. Die Ergebnisse werden immer bis zu einem maximalen $Q^2 = 0.3 \text{ GeV}^2$ dargestellt. Es ist anzunehmen, daß die Formfaktoren in der hier gerechneten chiralen Ordnung nur maximal bis zu diesem Impulsübertrag beschrieben werden können.

5.5.1 Ergebnisse in EOMS von Fit I

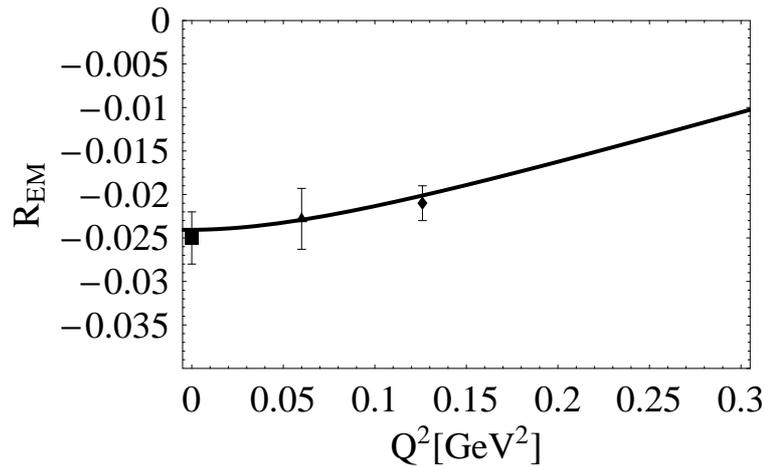


Abbildung 5.13: Verhältnis R_{EM} mit Datenpunkten aus [Bec+00] (Box), [Sta+06] (Dreieck), [Mer+01] (Diamant).

In den Abbildungen 5.13 bis 5.17 sind die Resultate im EOMS-Renormierungsschema ohne Berücksichtigung des ρ^0 -Mesons abgebildet. Die Formfaktoren sind nun hier und im folgenden in der Konvention von Jones und Scadron definiert. Man beachte, daß die in den Abbildungen 5.13 und 5.15 gezeigten Funktionen an die dort eingezeichneten Meßwerte angefitet wurden. Man kann erkennen, daß R_{EM} dabei scheinbar recht gut beschrieben wird in einem Bereich bis ca. 0.15 GeV^2 . In Hinblick auf den Verlauf der experimentellen Daten für wesentlich höhere Werte von Q^2 verläuft die Kurve aber ab diesem Punkt zu steil. Der Verlauf des magnetischen Dipolformfaktors G_M^*

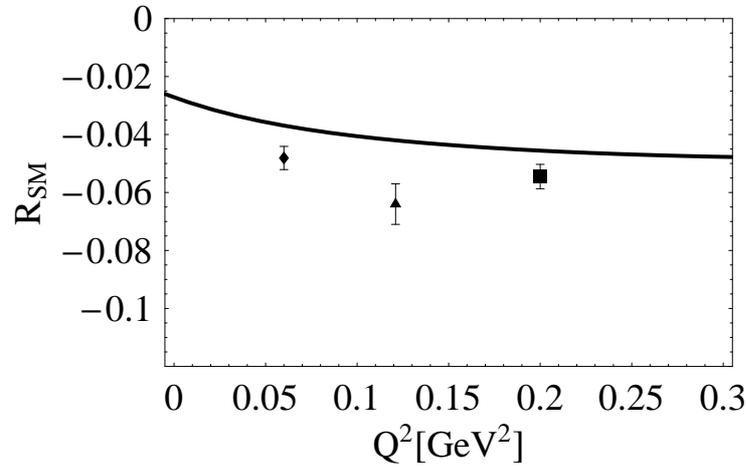


Abbildung 5.14: Verhältnis R_{SM} mit Datenpunkten aus [Sta+06] (Diamant), [POS+01] (Dreieck), [Els06] (Box).

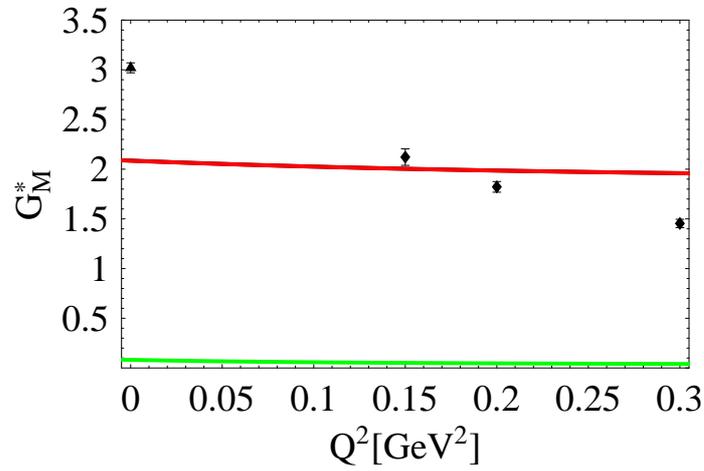


Abbildung 5.15: Magnetischer Dipolformfaktor G_M^* . Schwarze Linie (von roter überdeckt): $|G_M^*|$; rote Linie: $\text{Re}(G_M^*)$; grüne Linie: $\text{Im}(G_M^*)$. Datenpunkte sind aus [Bec+00] (Dreieck), [Bät+72] (Diamant) entnommen.

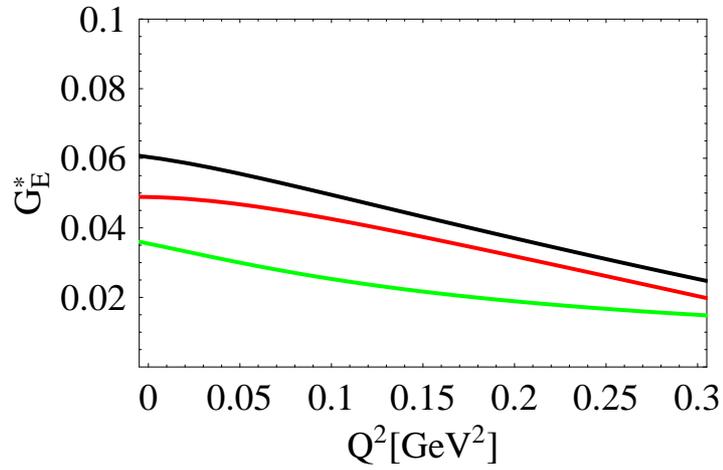


Abbildung 5.16: Elektrischer Quadrupolformfaktor G_E^* . Schwarze Linie: $|G_E^*|$; rote Linie: $\text{Re}(G_E^*)$; grüne Linie: $\text{Im}(G_E^*)$.

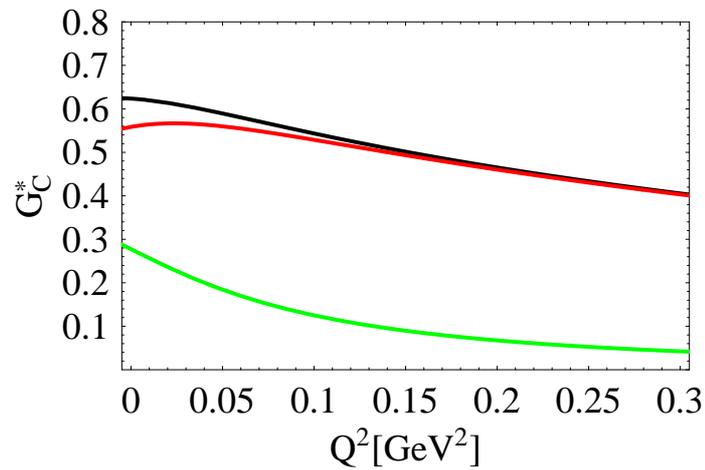


Abbildung 5.17: Coulomb-Quadrupolformfaktor G_C^* . Schwarze Linie: $|G_C^*|$; rote Linie: $\text{Re}(G_C^*)$; grüne Linie: $\text{Im}(G_C^*)$.

(Abbildung 5.15) weist allerdings eine viel zu schwache Krümmung auf. Das Ergebnis für R_{SM} (Abbildung 5.14) stellt nun eine komplette Vorhersage dar. Es läßt sich festhalten, daß die Kurve etwas höher verläuft, als aus experimenteller Sicht erwartet wird. Da jedoch G_M^* in R_{SM} eingeht, ist die Vorhersage des Verlaufs eher zufällig richtig. Die Kurven für den elektrischen und den Coulomb-Formfaktor stellen auch komplette Vorhersagen dar. Aussagen über die Genauigkeit dieser letzten beiden Kurven lassen sich eher schlecht anstellen, da keine experimentellen Daten zum Vergleich zur Verfügung standen und auch der Zusammenhang zwischen komplexem Rechenergebnis und als reell definierten Formfaktoren nicht bekannt ist (im Vergleich zu G_M^* sind hier nämlich die Imaginärteile nicht vernachlässigbar). Jedoch kann man aus der Beschreibung von R_{EM} und R_{SM} folgern, daß G_E^* und G_C^* wie G_M^* eher schlecht den tatsächlichen Verlauf der Größen beschreiben. Lediglich das erwartete Verhalten stimmt für alle drei Formfaktoren, denn ihre Werte fallen mit steigendem Q^2 .

5.5.2 Ergebnisse in reformulierter IR von Fit I

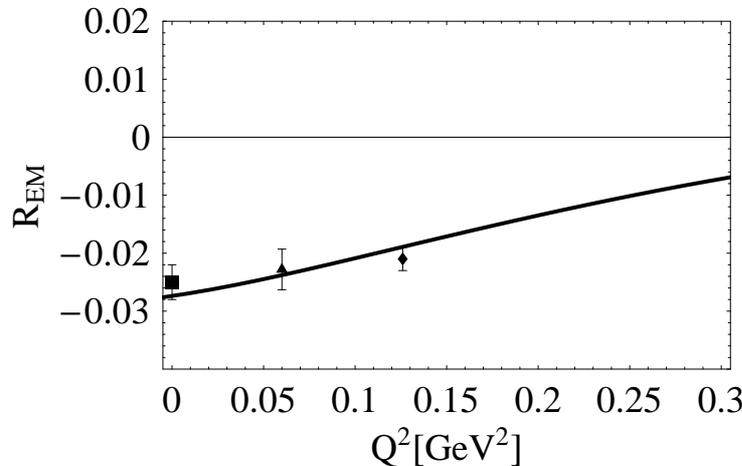


Abbildung 5.18: Verhältnis R_{EM} . Schwarze Linie: erste Lösung. Datenpunkte siehe Abbildung 5.13.

Wendet man die reformulierte IR an, so ergibt sich gegenüber dem EOMS-Schema ein wichtiger Unterschied. Die nichtrenormierten Diagramme, sowie die Baumbeiträge erfüllen alle den Stromerhalt (siehe Gleichung (5.19)). Im EOMS-Schema erfüllen die renormierten Diagramme auch den Stromerhalt, da die zählschemaverletzenden Terme in den Parametern der Baumbeiträge

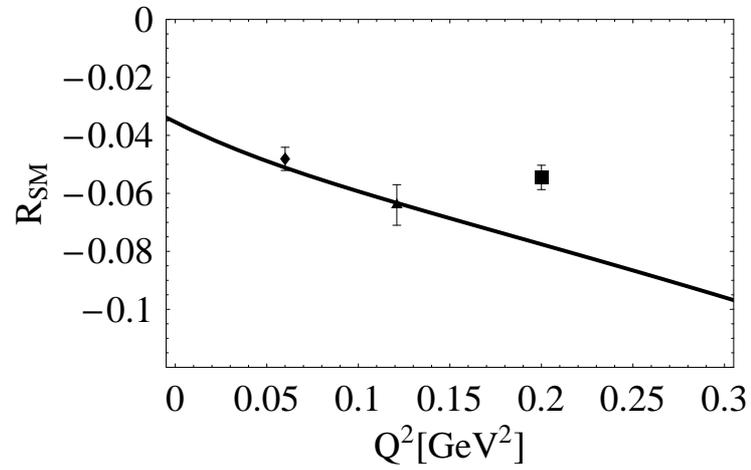


Abbildung 5.19: Verhältnis R_{SM} . Schwarze Linie: erste Lösung. Datenpunkte siehe Abbildung 5.14.

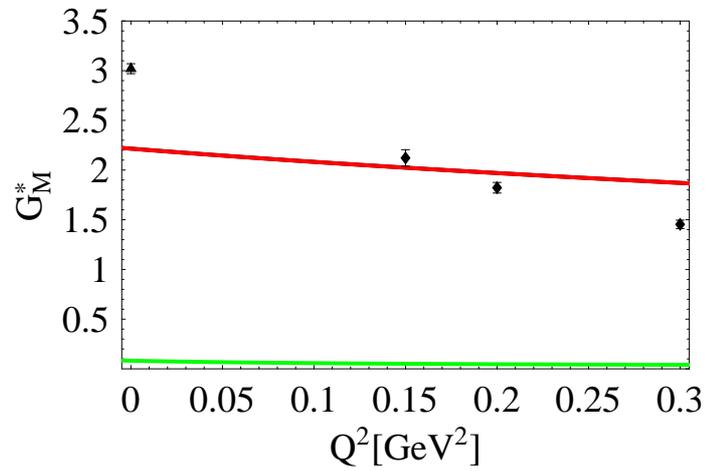


Abbildung 5.20: Magnetischer Dipolformfaktor G_M^* . Schwarze Linie (von roter überdeckt): $|G_M^*|$; grüne Linie: $\text{Im}(G_M^*)$; rote Linie: $\text{Re}(G_M^*)$. Datenpunkte siehe Abbildung 5.15.

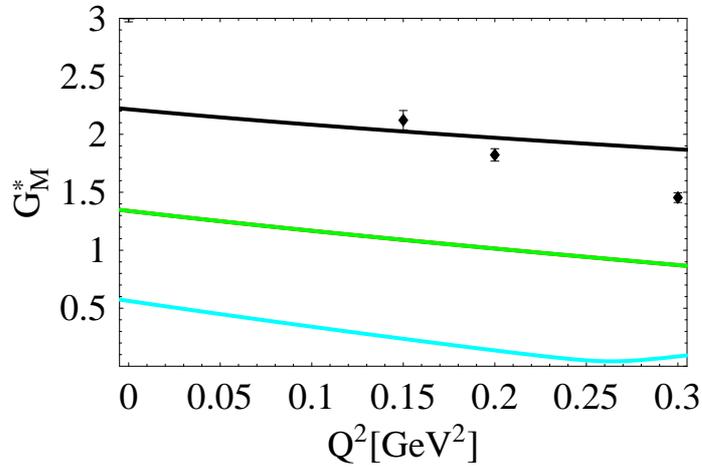


Abbildung 5.21: Betrag des magnetischer Dipolformfaktor G_M^* . Schwarze Linie: erste Lösung; rote Linie: zweite Lösung (von grüner Linie verdeckt); grüne Linie: dritte Lösung; türkise Linie: vierte Lösung. Datenpunkte siehe Abbildung 5.15.

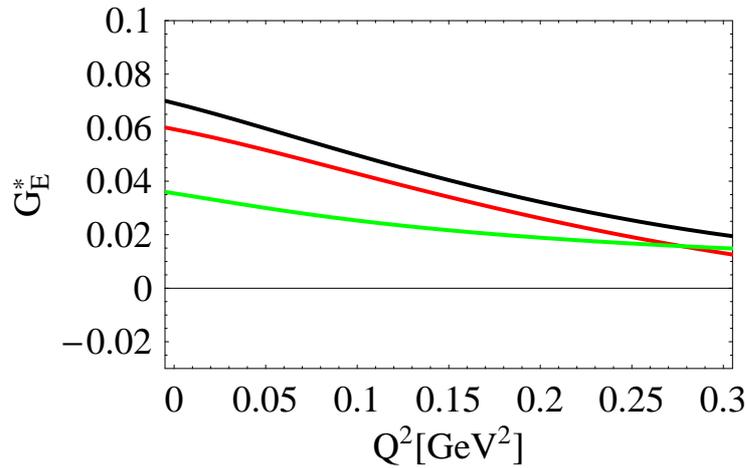


Abbildung 5.22: Elektrischer Quadrupolformfaktor G_E^* . Schwarze Linie: $|G_E^*|$; rote Linie: $\text{Re}(G_E^*)$; grüne Linie: $\text{Im}(G_E^*)$.

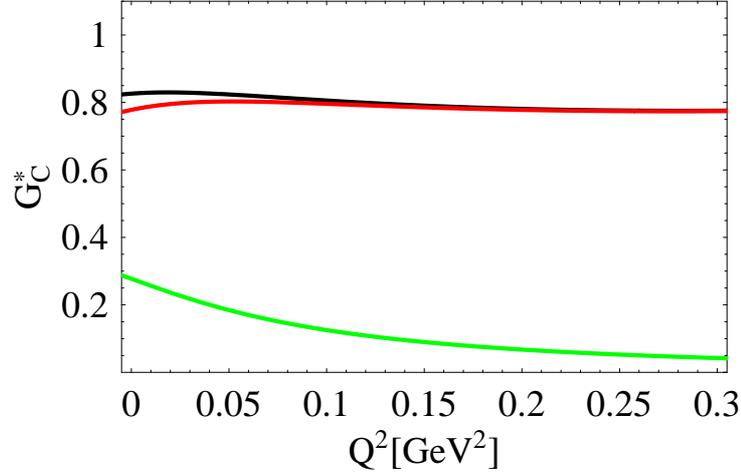


Abbildung 5.23: Coulomb-Quadrupolformfaktor G_C^* . Schwarze Linie: $|G_C^*|$; rote Linie: $\text{Re}(G_C^*)$; grüne Linie: $\text{Im}(G_C^*)$.

absorbiert werden. Im reformulierten IR-Schema wird durch Abziehen der Terme der Stromerhalt (in höherer Ordnung) verletzt, da die Abzugsterme selbst nur bis zu einer endlichen Ordnung gerechnet wurden. Somit tritt hier eine Besonderheit bei der Berechnung der Formfaktoren auf. Wie in Kapitel 5.4 bereits erläutert, gibt es vier Möglichkeiten aus den Diagrammen die Formfaktoren zu bestimmen, die identisch sind, solange der elektromagnetische Strom erhalten ist. Da dies hier nicht der Fall ist, kann man folgendermaßen vorgehen. Die Konstanten in den Baumdiagrammen werden an die Lösung aus Gleichung (5.28) angepaßt. Die weiteren Lösungen werden dann auch abgeleitet und in diesen Lösungen wird für die Parameter die Werte der ersten Lösung eingesetzt. Die Ergebnisse für Fit I im reformulierten IR-Schema sind nun in den Abbildungen 5.18 bis 5.23 dargestellt. Die schwarze Kurve stellt dabei immer das Ergebnis der ersten Lösung dar. In den Abbildungen 5.18, 5.19 und 5.21 wurden jeweils zusätzlich die weiteren Lösungen gezeigt. Diese verwenden aber die Parameter aus Lösung eins. Man erkennt leicht, daß sie teilweise stark von Lösung eins abweichen, denn in R_{EM} und R_{SM} liegen sie außerhalb des abgebildeten Bereichs. Diese Abweichung stellt ein Maß für die Ungenauigkeit der angewandten Methode dar, da die Abzugsterme nur bis zu einer endlichen Ordnung berechnet wurden. Die Ergebnisse der ersten Lösung sind im Rahmen der anzunehmenden Fehler in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Fit I in EOMS. Der Verlauf der Kurve von R_{SM} ist hier allerdings wesentlich steiler fallend. Unterschiede zwischen den Renormierungsschemata entstehen durch die Bestimmung der Parameter in den Baumdiagrammen, da es sich ja um einen nichtlinearen Fit handelt,

der versucht das χ^2 zu optimieren. So beschreibt der Plot in Abbildung 5.18 zwar auch die eingezeichneten Meßwerte, jedoch ist die Steigung der Kurve größer als in der EOMS-Lösung in Abbildung 5.13 und insbesondere zu groß im Hinblick auf die Meßwerte bei höheren Q^2 -Werten. Betrachtet man dagegen Abbildung 5.20, so sieht man, daß im Vergleich zu Abbildung 5.15 hier G_M^* eine etwas stärkere Krümmung aufweist, die im Hinblick auf die experimentellen Daten auch erwartet wird. Eine Aussage über G_E^* und G_C^* läßt sich hier genauso schwer treffen wie beim EOMS-Schema. Lediglich das erwartete Verhalten, nämlich ein Abfallen mit steigendem Q^2 ist erkennbar. Quantitativ sind beide Kurven sicherlich nur bedingt richtig, was man durch den Verlauf von G_M^* , R_{EM} und R_{SM} schließen kann, da ja G_M^* in diese Größen eingeht.

Bei Fit I in beiden Renormierungsschemata erkennt man ein Problem der Anpassung an die experimentellen Daten. Mit lediglich zwei freien Parametern lassen sich die drei Formfaktoren nur sehr schlecht gleichzeitig beschreiben, da eine stärkere Anpassung an einen Formfaktor die Beschreibung eines anderen Formfaktors verschlechtert.

5.5.3 Ergebnisse in EOMS von Fit II

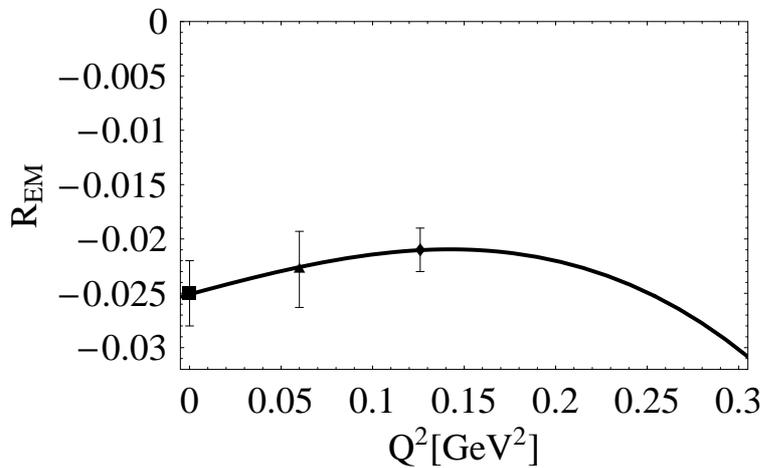


Abbildung 5.24: Verhältnis R_{EM} . Datenpunkte siehe Abbildung 5.13.

Wie man in Kapitel 5.5.1 und 5.5.2 sehen kann, gelingt mit den dort verwendeten Ergebnissen eine Beschreibung der Formfaktoren nur teilweise. Um nun eine bessere Beschreibung zu erhalten, wurde das Baumdiagramm mit

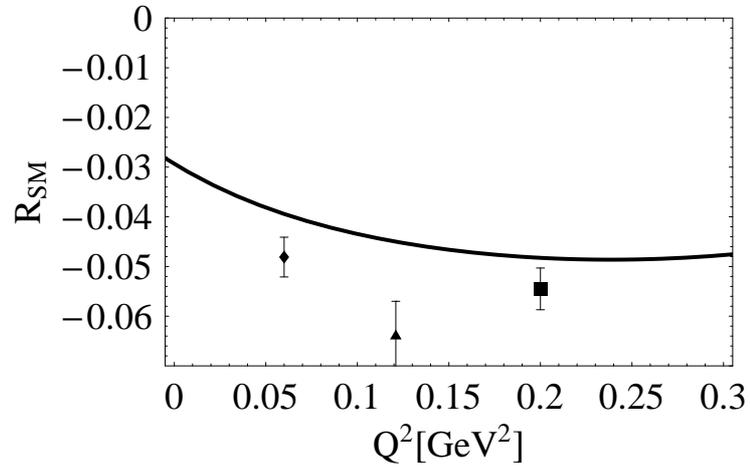


Abbildung 5.25: Verhältnis R_{SM} . Datenpunkte siehe Abbildung 5.14.

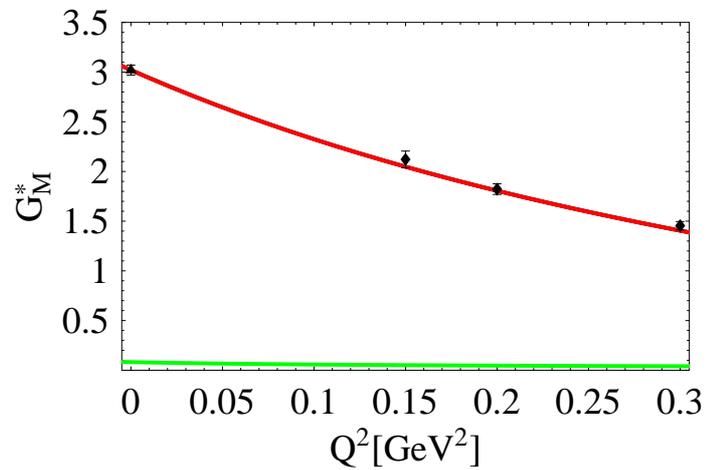


Abbildung 5.26: Magnetischer Dipolformfaktor G_M^* . Schwarze Linie (von roter überdeckt): $|G_M^*|$; rote Linie: $\text{Re}(G_M^*)$, grüne Linie: $\text{Im}(G_M^*)$. Datenpunkte siehe Abbildung 5.15.

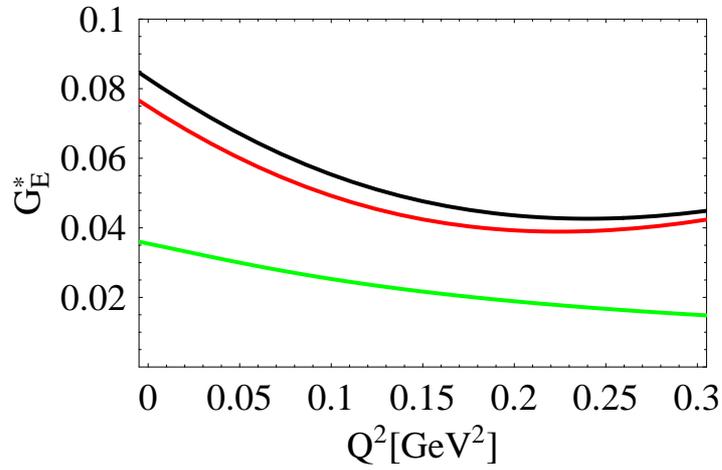


Abbildung 5.27: Elektrischer Quadrupolformfaktor G_E^* . Schwarze Linie: $|G_E^*|$; rote Linie: $\text{Re}(G_E^*)$; grüne Linie: $\text{Im}(G_E^*)$.

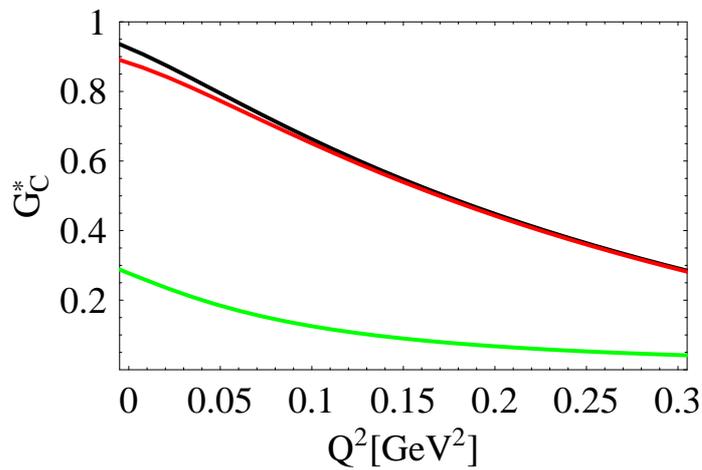


Abbildung 5.28: Coulomb-Quadrupolformfaktor G_C^* . Schwarze Linie: $|G_C^*|$; rote Linie: $\text{Re}(G_C^*)$; grüne Linie: $\text{Im}(G_C^*)$.

dem ρ^0 -Meson als zusätzlichem Freiheitsgrad eingebaut. Dadurch gilt es nun vier Parameter an die experimentellen Daten anzupassen, wodurch sich die Beschreibung der Daten verbessern sollte. Die Ergebnisse für das EOMS-Schema sind in den Abbildungen 5.24 bis 5.28 gezeigt. Man kann erkennen, daß die Beschreibung von R_{EM} in etwa so gut ist wie ohne die Berücksichtigung des ρ^0 . Die Meßwerte werden von beiden Kurven beschrieben, bei Fit I steigt R_{EM} jedoch für höhere Q^2 , während es in Fit II abfällt. Hier wird G_M^* allerdings sehr gut beschrieben, woraus man folgern kann, daß auch G_E^* deutlich besser beschrieben wird. Es zeigt sich aber, daß die Funktion G_E und somit R_{EM} bei $Q^2 \approx 0.2 \text{ GeV}^2$ einen Wendepunkt besitzen. Vom experimentellen Standpunkt her sollten, wie bereits erwähnt, alle Formfaktoren in dem hier gezeigten Bereich mit steigendem Q^2 monoton fallen. Die Vorhersage für R_{SM} ist auch vergleichbar mit der aus Kapitel 5.5.1. Auch hier sollte als Konsequenz die Beschreibung von G_C^* besser gelingen.

5.5.4 Ergebnisse in reformulierter IR von Fit II

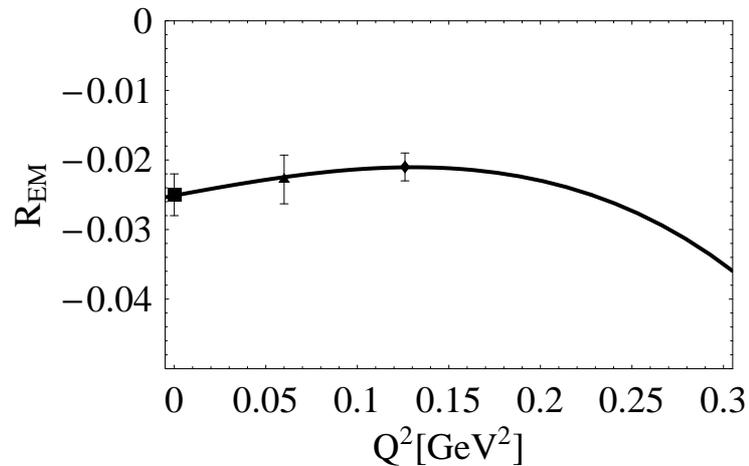


Abbildung 5.29: Verhältnis R_{EM} . Schwarze Linie: erste Lösung. Datenpunkte siehe Abbildung 5.13.

Die Ergebnisse der Anwendung der reformulierten IR unter Berücksichtigung des ρ^0 -Mesons sind in den Abbildungen 5.29 bis 5.34 dargestellt. Hier kommen nun alle Dinge zum Tragen, welche in den Kapiteln 5.5.1, 5.5.2 und 5.5.3 bereits erwähnt wurden. Zum einen gibt es auch hier schon wie in Kapitel 5.5.2 wieder mehrere Lösungen, die hier nur teilweise im gezeigten Bereich liegen (Abbildung 5.29, 5.30 und 5.32). Auch hier unterscheiden sich die

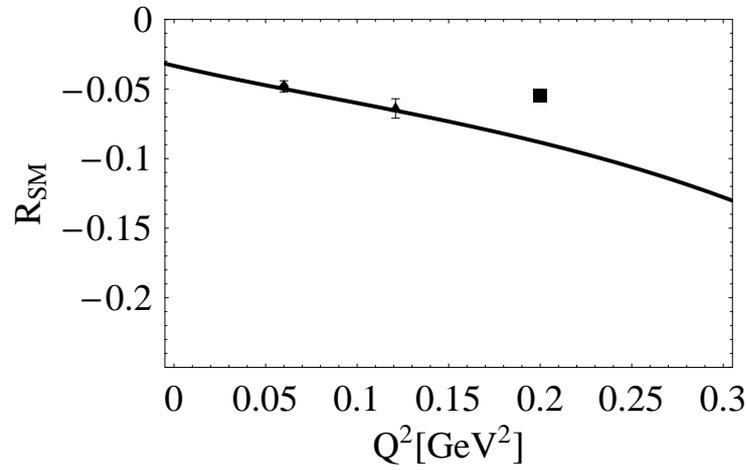


Abbildung 5.30: Verhältnis R_{SM} . Schwarze Linie: erste Lösung. Datenpunkte siehe Abbildung 5.14.

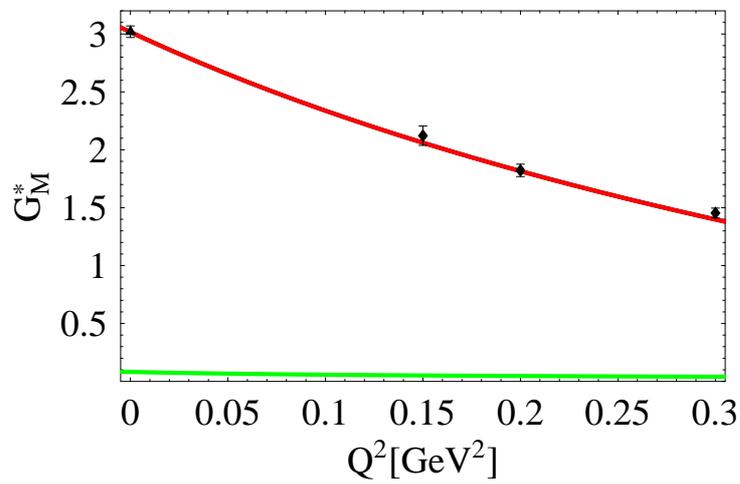


Abbildung 5.31: Magnetischer Dipolformfaktor G_M^* . Schwarze Linie (von roter überdeckt): $|G_M^*|$; grüne Linie: $\text{Im}(G_M^*)$; rote Linie: $\text{Re}(G_M^*)$. Datenpunkte siehe Abbildung 5.15.

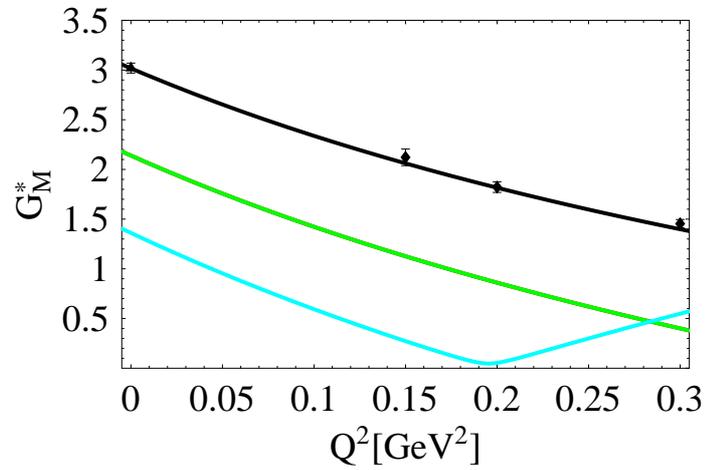


Abbildung 5.32: Betrag des magnetischer Dipolformfaktor G_M^* . Schwarze Linie: erste Lösung; rote Linie: zweite Lösung (von grüner Linie verdeckt); grüne Linie: dritte Lösung; türkise Linie: vierte Lösung. Datenpunkte siehe Abbildung 5.15.

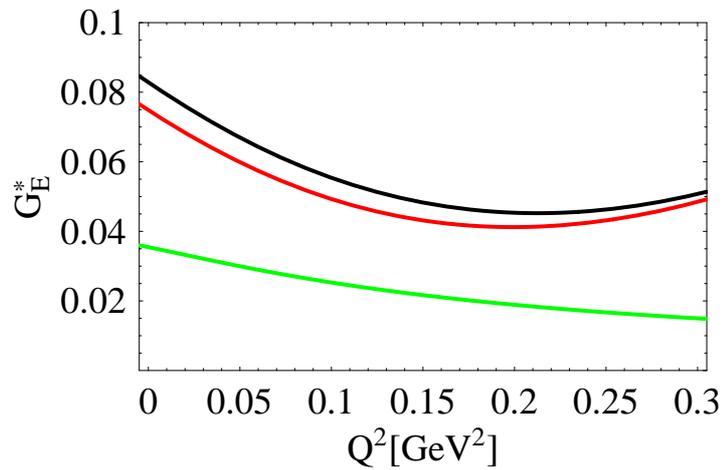


Abbildung 5.33: Elektrischer Quadrupolformfaktor G_E^* . Schwarze Linie: $|G_E^*|$; rote Linie: $\text{Re}(G_E^*)$; grüne Linie: $\text{Im}(G_E^*)$.

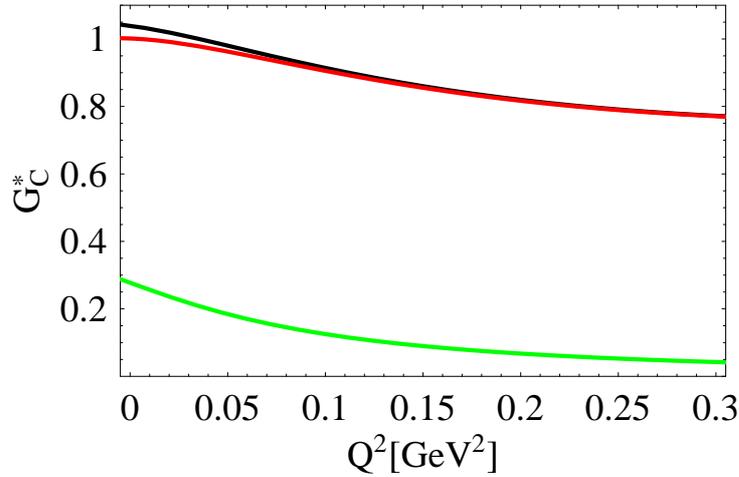


Abbildung 5.34: Coulomb-Quadrupolformfaktor G_C^* . Schwarze Linie: $|G_C^*|$; rote Linie: $\text{Re}(G_C^*)$; grüne Linie: $\text{Im}(G_C^*)$.

weiteren Lösungen von der angepaßten Lösung aufgrund der Verletzung des Stromerhalts. Zum anderen gelingt auch hier insgesamt eine Verbesserung der Beschreibung der Daten durch Einbeziehung des ρ^0 . R_{EM} ist im wesentlichen identisch mit dem Ergebnis im EOMS-Schema. R_{SM} fällt etwas steiler ab als in Fit I im IR-Schema, was das Ergebnis scheinbar unwesentlich schlechter macht. Auch hier kommt wieder der Fitalgorithmus als Hauptursache für die Unterschiede der Renormierungsschemata zum Tragen. Die Beschreibung von G_M^* gelingt hier genausogut, wie bei Fit II im EOMS-Schema. Ein Vergleich zur Variante, die das ρ^0 -Meson nicht berücksichtigt zeigt also auch hier insgesamt eine Verbesserung bei der Beschreibung der experimentellen Daten. Ähnlich wie beim EOMS-Schema in Fit II besitzt G_E^* bei $Q^2 \approx 0.25 \text{ GeV}^2$ einen Wendepunkt. G_C^* zeigt zumindest qualitativ über den ganzen abgebildeten Bereich den gewünschten Verlauf.

5.5.5 Vergleich mit anderen Rechnungen

Um nun einen Vergleich mit anderen Untersuchungen der Formfaktoren durchführen zu können, werden zunächst die Unterschiede der anderen Rechnungen zu dieser hier kurz erläutert. Danach werden die jeweils erzielten Ergebnisse gemeinsam dargestellt. Beim Vergleich werden aus dieser Arbeit jeweils nur die Ergebnisse von Fit II herangezogen, da die damit erzielten Resultate die experimentellen Werte weitaus besser beschreiben.

In [GH06] wurde eine nichtrelativistische Untersuchung der Formfaktoren

durchgeführt. Dabei zeigte sich, daß die experimentellen Daten nicht beschreibbar waren. Zur Verbesserung der Rechnung wurde dann ein Term in der Lagrangedichte von höherer chiraler Ordnung hinzugenommen. Es wurde argumentiert, daß dieser benötigt wird um die vergleichsweise kleinen elektrischen- und Coulomb-Formfaktoren beschreiben zu können.

In [PV07] wurde ein anderes Zählschema verwendet, das sogenannte δ -Zählschema [PP03]. Während in dieser Arbeit alle „kleinen Größen“ (Massen, Impulse) als gleiche chirale Ordnung gezählt werden, findet man dort eine andere Gewichtung. Die Pionmasse wird als Ordnung zwei gezählt und die Delta-Nukleon-Massendifferenz als Ordnung eins. Die Impulse werden hierbei gezählt, je nachdem in welcher Größenordnung sie sich befinden. Ist ein Impuls in der Größenordnung der Pionmasse, so zählt er als Ordnung zwei. Ist er aber in der Größenordnung der Delta-Nukleon-Massendifferenz, so wird er als Ordnung eins gezählt. Weiterhin wurde in dieser Rechnung auch das ρ^0 -Meson auf Baumniveau mitberücksichtigt. Es wurden allerdings keine Diagramme mit einer inneren Deltalinie berücksichtigt.

Das MAID2007-Modell [DKT07] basiert auf einer Beschreibung des Einpion-Produktionsprozesses. Ziel dieses Modells ist eine empirisch möglichst gute Beschreibung aller experimentellen Daten im Bereich der Pionphoto- und elektroproduktion zu erreichen.

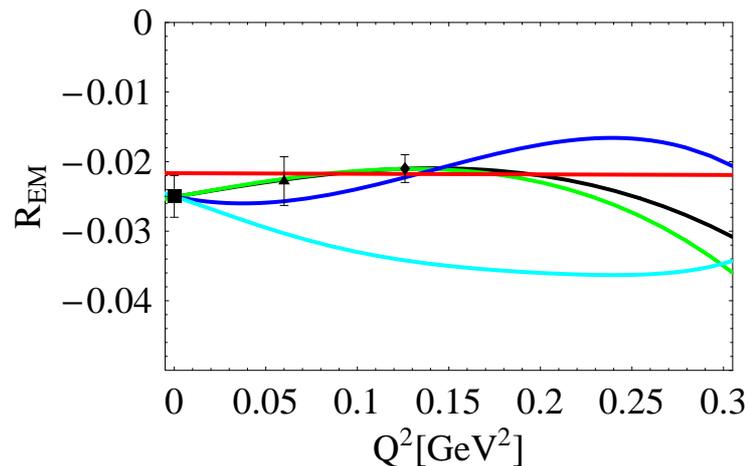


Abbildung 5.35: Verhältnis R_{EM} . Schwarze Linie: FIT II in EOMS; grüne Linie: Lösung 1 von FIT II in IR reformuliert; türkise Linie: [PV07]; blaue Linie: [GH06]; rote Linie: [DKT07]). Datenpunkte siehe Abbildung 5.13.

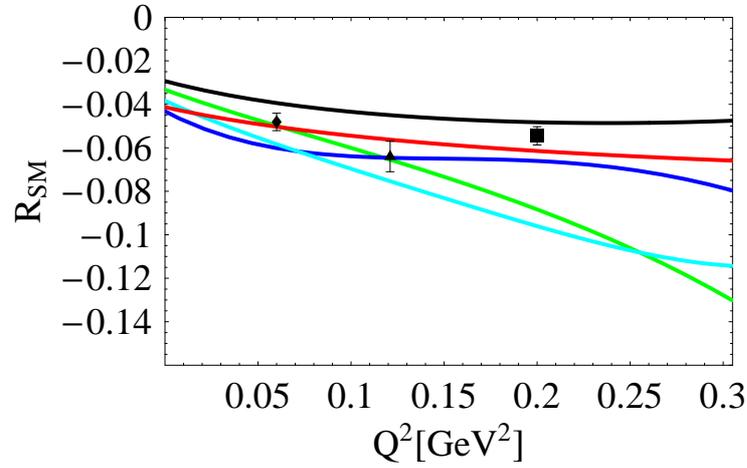


Abbildung 5.36: Verhältnis R_{SM} . Schwarze Linie: FIT II in EOMS; grüne Linie: Lösung 1 von FIT II in IR reformuliert; türkise Linie: [PV07]; blaue Linie: [GH06]; rote Linie: [DKT07]). Datenpunkte siehe Abbildung 5.14.

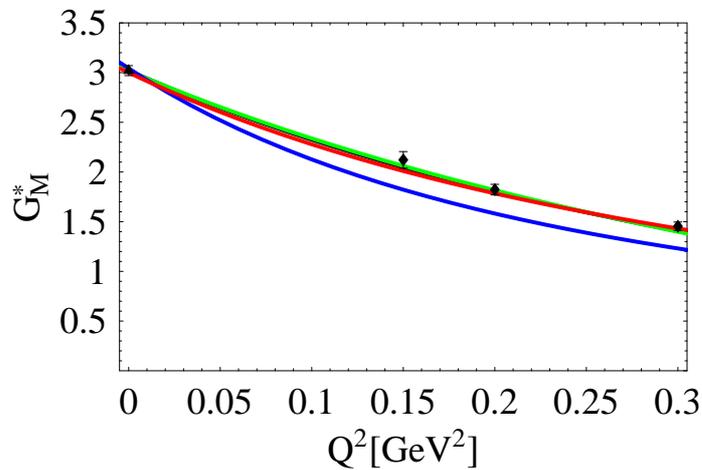


Abbildung 5.37: Betrag des magnetischer Dipolformfaktor G_M^* . Schwarze Linie: FIT II in EOMS (fällt mit grün zusammen, deswegen nicht erkennbar); grüne Linie: Lösung 1 von FIT II in IR reformuliert; blaue Linie: [GH06]; rote Linie: [DKT07]). Datenpunkte siehe Abbildung 5.15.

Die Ergebnisse der verschiedenen Rechnungen sind nun gemeinsam in den Abbildungen 5.35, 5.36 und 5.37 zu sehen. Die Größe R_{EM} wird in allen Methoden recht gut beschrieben. Zwar weichen die Ergebnisse von [PV07] ein wenig von den anderen ab, allerdings läßt sich das wohl durch die verwendeten Daten bei der Anpassung erklären. Die Beschreibung von R_{SM} , welche für die Ergebnisse in dieser Arbeit eine reine Vorhersage ist, gelingt insgesamt weniger gut. Man muß jedoch beachten, daß die Formfaktoren G_C^* und G_E^* , die in R_{SM} bzw. R_{EM} eingehen, zum Teil wesentlich kleiner sind als G_M^* . Es zeigt sich, daß alle hier präsentierten Methoden eine gewisse Schwierigkeit haben, die beiden kleineren Formfaktoren akkurat zu beschreiben. Hier zeigt sich im übrigen ein gewisser Unterschied zwischen den in dieser Arbeit verwendeten Renormierungsschemata. Man sollte aber beachten, daß dies wohl auf die Anpassung an die experimentellen Daten zurückzuführen ist. Die Beschreibung von G_M^* gelingt in allen Arbeiten sehr gut (man beachte, daß das Ergebnis von [PV07] nicht gezeigt wird, da dieses dort nicht angegeben wurde und daß die grüne und schwarze Linie hier quasi identisch sind, so daß man nur die Grüne sieht). Die Abweichung von [GH06] im Vergleich zu den Resultaten dieser Arbeit und der MAID2007-Parametrisierung wird von den dortigen Autoren darauf zurückgeführt, daß der dort zusätzlich eingeführte Term zur Verbesserung der Beschreibung von G_E^* und G_C^* das Resultat von G_M^* verschlechtert. Vergleiche der anderen Formfaktoren werden an dieser Stelle nicht unternommen, da nicht geklärt werden konnte, wie der genaue Zusammenhang zwischen den komplexen Formfaktoren in der chiralen Störungstheorie und den rein reellen experimentellen Daten bzw. der MAID2007-Parametrisierung ist. Wie bereits weiter oben erwähnt, wurde an dieser Stelle nur ein Vergleich für G_M^* durchgeführt, da hier der Imaginärteil des Resultats verschwindend gering ist.

5.5.6 Das Siegert-Theorem

Das Siegert-Theorem macht modellunabhängige Vorhersagen für die Beziehungen zwischen den verschiedenen Multipolen. Eine detaillierte Diskussion dieses Theorems findet sich in [DKT07]. Eine wichtige Aussage darin lautet, daß im sogenannten Siegert-Limes ($|\vec{q}| \rightarrow 0$, \vec{q} ist der Dreier-Photonimpuls) folgende Relation gilt:

$$R_{SM} \xrightarrow{|\vec{q}| \rightarrow 0} \frac{|\vec{q}|}{m_\Delta - m_N} R_{EM}. \quad (5.32)$$

Da in dieser Arbeit angenommen wird, daß $W = m_\Delta$, ergibt sich folgender Wert für das Quadrat des Photonimpulses:

$$Q^2 = Q_{PT}^2 = -(W - m_N)^2 = -(m_\Delta - m_N)^2, \quad (5.33)$$

wobei „PT“ für pseudothreshold, also Pseudoschwellenwert, steht. Der Grenzübergang für $Q \rightarrow Q_{PT}$ läßt sich allerdings nicht exakt durchführen, da im Grenzfall eine Singularität vorliegt. Nähert man jedoch den Q^2 -Wert numerisch sehr nahe an den Schwellenwert (hier bis $\frac{Q}{Q_{PT}} \approx 1.35 \cdot 10^{-5}$ %), so sollte auch die Relation (5.32) näherungsweise erfüllt sein. Es zeigt sich, daß im Rahmen der numerischen Genauigkeit für alle untersuchten Lösungen der Formfaktoren (beide Renormierungsschemata und mit und ohne Berücksichtigung des ρ^0 -Mesons) das Siegert-Theorem voll erfüllt wird.

Eine weitere wichtige Aussage des Siegert-Theorems beschreibt das Verhalten der Multipole für $|\vec{q}| \rightarrow 0$. In diesem Grenzwert verhalten sich die Multipole wie

$$M_{1+}^{3/2}, E_{1+}^{3/2} \sim |\vec{q}|, \quad (5.34)$$

$$S_{1+}^{3/2} \sim |\vec{q}|^2. \quad (5.35)$$

Um diese Grenzwerte zu überprüfen, benötigt man Beziehungen zwischen

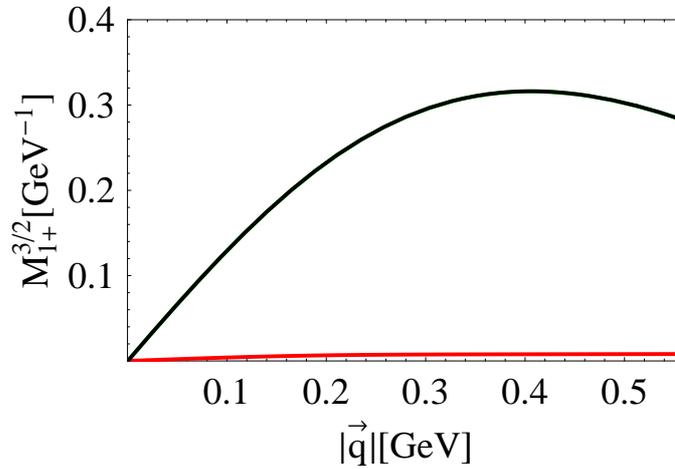


Abbildung 5.38: Verlauf des magnetischen Multipols $M_{1+}^{3/2}$ für $|\vec{q}| \rightarrow 0$. Schwarze Linie: $|M_{1+}^{3/2}|$; grüne Linie (von schwarzer überdeckt): $\text{Re}(M_{1+}^{3/2})$; rote Linie: $\text{Im}(M_{1+}^{3/2})$.

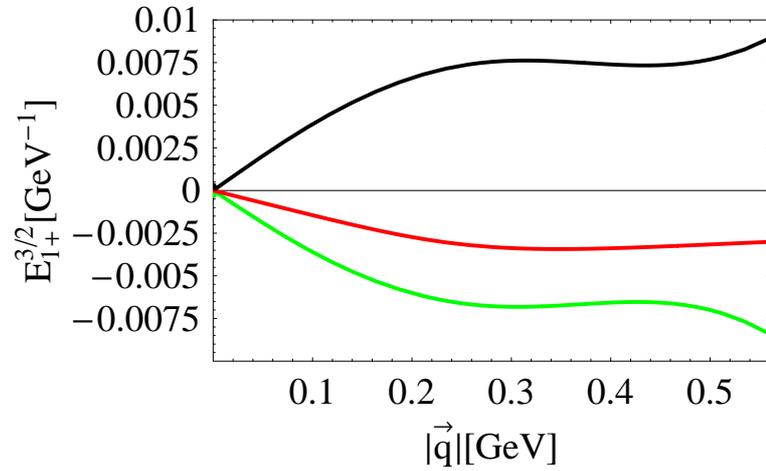


Abbildung 5.39: Verlauf des elektrischen Multipols $E_{1+}^{3/2}$ für $|\vec{q}| \rightarrow 0$. Schwarze Linie: $|E_{1+}^{3/2}|$; grüne Linie: $\text{Re}(E_{1+}^{3/2})$; rote Linie: $\text{Im}(E_{1+}^{3/2})$.

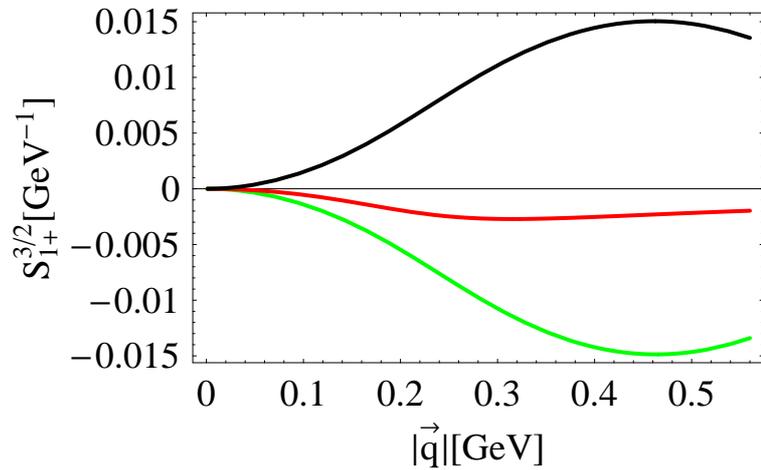


Abbildung 5.40: Verlauf des skalaren Multipols $S_{1+}^{3/2}$ für $|\vec{q}| \rightarrow 0$. Schwarze Linie: $|S_{1+}^{3/2}|$; grüne Linie: $\text{Re}(S_{1+}^{3/2})$; rote Linie: $\text{Im}(S_{1+}^{3/2})$.

den Formfaktoren und den Multipolen. Diese sind gegeben durch:

$$\frac{G_M^*}{\sqrt{1 + Q^2/(m_N + m_\Delta)^2}} = b \operatorname{Im}(M_{1+}^{3/2}), \quad (5.36)$$

$$\frac{G_E^*}{\sqrt{1 + Q^2/(m_N + m_\Delta)^2}} = -b \operatorname{Im}(E_{1+}^{3/2}), \quad (5.37)$$

$$\frac{G_M^*}{\sqrt{1 + Q^2/(m_N + m_\Delta)^2}} = -b \frac{2m_\Delta}{|\vec{q}|} \operatorname{Im}(S_{1+}^{3/2}), \quad (5.38)$$

mit

$$b = \left(\frac{8m_N^2 |\vec{k}| \Gamma}{3\alpha |\vec{q}|^2} \right)^{1/2}, \quad (5.39)$$

wobei $\Gamma = 115$ MeV die Breite der Deltaresonanz und \vec{k} der Dreierimpuls des auslaufenden Pions ist (beachte dazu die Diskussion zur Pionelektroproduktion). Für $W = m_\Delta$ sind die Multipole rein imaginär, so daß die Formfaktoren rein reelle Größen sein sollten. Wie in den vorherigen Unterkapiteln bereits erläutert, ist das bei den Rechnungen in chiraler Störungstheorie nicht der Fall. Um nun die Aussagen des Siegert-Theorems zu überprüfen, wird deswegen jeweils der Real- und Imaginärteil, sowie der Absolutwert der Multipole, welche aus den Formfaktoren abgeleitet wurden, gezeigt. Die Resultate sind in den Abbildungen 5.38, 5.39 und 5.40 abgebildet. Hierbei handelt es sich um die Resultate des Fit II im EOMS-Schema. Für $|\vec{q}| \rightarrow 0$ läßt sich sehr schön ein linearer Verlauf in $M_{1+}^{3/2}$ und $E_{1+}^{3/2}$, sowie ein quadratischer Verlauf in $S_{1+}^{3/2}$ feststellen. Für die anderen Lösungen wurde der Grenzwert auch überprüft, und der gleiche Verlauf konnte nachgewiesen werden.

Ein weiterer Zusammenhang besteht nach dem Siegert-Theorem zwischen dem elektrischen und dem longitudinalen Multipol. Hier gilt im Siegert-Limes:

$$\frac{E_{1+}^{3/2}}{L_{1+}^{3/2}} \rightarrow 1. \quad (5.40)$$

Der longitudinale Multipol $L_{1+}^{3/2}$ ist mit dem skalaren über Eichinvarianz verknüpft:

$$|\vec{q}| L_{1+}^{3/2} = \omega S_{1+}^{3/2}. \quad (5.41)$$

Hierbei stellt ω die Energie des Photons im Schwerpunktsystem dar. Auch dieser Grenzwert wurde numerisch überprüft. Wie oben läßt sich der Grenzwert nicht exakt erreichen, jedoch wurde auf $\frac{Q}{Q_{PT}} \approx 1.35 \cdot 10^{-5} \%$ angenähert. Hierbei tritt im Grenzwert das Problem der Ungewissheit zwischen Real- und

Imaginärteil nicht auf. Eine numerische Überprüfung zeigt nämlich das gewünschte Resultat, d.h. der Imaginärteil des Quotienten verschwindet und der Realteil wird zu eins.

Kapitel 6

Wellenfunktionsrenormierungs- konstante der Deltaresonanz

Die Wellenfunktionsrenormierungskonstante (WFRK) stellt ein wichtiges Objekt bei der Berechnung von quantenfeldtheoretischen Größen (Wirkungsquerschnitte, Zerfallszeiten, etc.) dar (siehe z.B. [PS97]). In diesem Kapitel wird sie für die Deltaresonanz hergeleitet. Definiert ist sie als das Residuum des Pols des sogenannten „angezogenen Propagators“. In [Hac+05] wird dieser angezogene Propagator, sowie die physikalische Masse des Delta hergeleitet. Darauf aufbauend wird nun hier die Wellenfunktionsrenormierungskonstante berechnet.

Der angezogene Propagator ist die Summe aus nacktem Propagator und Selbstenergieeinschüben (S_0 = nackter Propagator, Σ = Selbstenergieeinschübe):

$$iS^{\mu\nu} = iS_0^{\mu\nu} + iS_0^{\mu\alpha}i\Sigma_{\alpha\beta}iS_0^{\beta\nu} + iS_0^{\mu\alpha}i\Sigma_{\alpha\beta}iS_0^{\beta\gamma}i\Sigma_{\gamma\delta}iS_0^{\delta\nu} + \dots \quad (6.1)$$

Dies läßt sich umschreiben zu

$$S^{\mu\nu} = S_0^{\mu\nu} - S^{\mu\rho}\Sigma_{\rho\sigma}S_0^{\sigma\nu}. \quad (6.2)$$

Aufgrund der Wirkung von γ_μ bzw. p_μ auf den Propagator besitzen einige Teile des angezogenen Propagators keinen Pol. Es läßt sich nun zeigen, daß man den Propagator deswegen in folgender Form darstellen kann:

$$S^{\mu\nu}(P) = S_0^{\mu\nu}(P) - S_\rho^\mu(P)(\sigma_1 + \not{P}\sigma_6)S_0^{\rho\nu}(P) + \text{polfreie Terme}. \quad (6.3)$$

σ_1 und σ_6 stellen die Koeffizienten der Strukturen $g^{\mu\nu}$ und $\not{P}g^{\mu\nu}$ der Selbstenergiediagramme dar. Diese wurden hier bis chirale Ordnung drei gerechnet

und sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Der nackte Propagator im mittleren



Abbildung 6.1: Diagramme der Deltaselbstenergie bis Ordnung drei

Term obiger Gleichung hat nach der Multiplikation mit dem restlichen Ausdruck in dem Term nur für Strukturen, die $g^{\mu\nu}$ enthalten, einen Pol. Dies liegt auch wieder an der Wirkung der Gammamatrizen bzw. des Viererimpulses auf den Propagator (siehe Gleichungen (A.8) bis (A.10)). Somit vereinfacht sich obiger Ausdruck zu

$$S^{\mu\nu}(P) = S_0^{\mu\nu}(P) + S^{\mu\nu}(P)(\sigma_1 + \not{P}\sigma_6) \frac{1}{\not{P} - m_\Delta} + \text{polfreie Terme.} \quad (6.4)$$

Auflösen ergibt nun für den angezogenen Propagator

$$S^{\mu\nu}(P) = S_0^{\mu\nu}(P)(\not{P} - m_\Delta) \frac{\not{P}(1 - \sigma_6) + (m_\Delta + \sigma_1)}{P^2(1 - \sigma_6)^2 - (m_\Delta + \sigma_1)^2} + \text{polfreie Terme.} \quad (6.5)$$

Der Ausdruck $S_0^{\mu\nu}(P)(\not{P} - m_\Delta)$ besitzt nun keinen Pol mehr. Um die Wellenfunktionsrenormierungskonstante zu berechnen, betrachtet man wieder Ausdruck (6.5). Hierbei wird insbesondere der Anteil benötigt, der den Pol besitzt:

$$\frac{(m_\Delta + \sigma_1) + \not{P}(1 - \sigma_6)}{P^2(1 - \sigma_6)^2 - (m_\Delta + \sigma_1)^2} = \frac{1}{\not{P}(1 - \sigma_6) - (m_\Delta + \sigma_1)}. \quad (6.6)$$

Gleichung (6.5) soll nun geschrieben werden als

$$X^{\mu\nu} \frac{\not{P} + m_{\text{Pol}}}{P^2 - m_{\text{Pol}}^2} \times Z_\Delta + \text{polfreie Terme.} \quad (6.7)$$

Konkret bedeutet dies:

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu} &= S_0^{\mu\nu}(\not{P} - m_\Delta) \frac{1}{\not{P}(1 - \sigma_6) - (m_\Delta + \sigma_1)} + \text{polfreie Terme} \\ &= X^{\mu\nu} \frac{Z_\Delta}{\not{P} - m_{\text{Pol}}} + \text{polfreie Terme.} \end{aligned} \quad (6.8)$$

$X^{\mu\nu}$ ist eine Linearkombination der Lorentzstrukturen des Deltapropagators (vgl. Gleichung (3.26) bzw. (3.27)). Z_Δ ist das Residuum an der Stelle $\not{P} = m_{\text{Pol}}$ und wird Wellenfunktionsrenormierungskonstante genannt. Man beachte hierbei den Unterschied zwischen dem Parameter m_Δ aus der nicht

renormierten Lagrangedichte und m_{Pol} , dem komplexen Pol des Delta. Diese besteht in der Sprache der Feynmandiagramme aus einer unendlichen Summe von Selbstenergieeinschüben. Dabei treten auch immer mehr Schleifen auf. Da aber die Wellenfunktionsrenormierungskonstante hier auf Einschleifenniveau berechnet werden soll, spielt die Masse der Deltaresonanz nur auf Baumniveau eine Rolle. Aus der Entwicklung für die Wellenfunktionsrenormierungskonstante und der Entwicklung der Masse wäre ein Term auf Einschleifenniveau in der Masse mindestens Zweischleifenniveau in der Wellenfunktionsrenormierungskonstante und damit höherer Ordnung. In diesem Falle gilt also $m_{\text{Pol}} = m_{\Delta}$. Somit ergibt sich (polfreie Terme fallen weg, da mit $\not{P} - m_{\text{Pol}}$ durchmultipliziert wird und die Stelle $\not{P} = m_{\text{Pol}}$ betrachtet wird):

$$Z_{\Delta} X^{\mu\nu} = S_0^{\mu\nu} (\not{P} - m_{\Delta}) \frac{1}{\not{P}(1 - \sigma_6) - (m_{\Delta} + \sigma_1)} (\not{P} - m_{\text{Pol}}) \Big|_{\not{P}=m_{\text{Pol}}}. \quad (6.9)$$

Da dies für alle Lorentzstrukturen gilt, wählt man am einfachsten den Koeffizienten $g^{\mu\nu}$. Das Resultat lautet nun:

$$Z_{\Delta} = \frac{\not{P} - m_{\text{Pol}}}{\not{P}(1 - \sigma_6(P^2)) - (m_{\Delta} + \sigma_1(P^2))} \Big|_{\not{P}=m_{\text{Pol}}}. \quad (6.10)$$

Man entwickelt nun Zähler und Nenner nach \not{P} um m_{Pol} bis einschließlich erste Ordnung (höhere Ordnungen tragen zum Residuum nicht bei):

$$Z_{\Delta} = \frac{\not{P} - m_{\text{Pol}}}{\not{P} - m_{\Delta} - m_{\text{Pol}}\sigma_6(P^2) - \sigma_1(P^2) - (\not{P} - m_{\text{Pol}})(\sigma_6(P^2) + \not{P}\sigma'_6(P^2) + \sigma'_1(P^2))} \Big|_{\not{P}=m_{\text{Pol}}}. \quad (6.11)$$

Hierbei ist $\sigma'_i(P^2)$ als

$$\sigma'_i(P^2) = \frac{\partial}{\partial \not{P}} \sigma_i(P^2) \quad (6.12)$$

zu verstehen. Da der Pol der physikalischen Masse entspricht gilt:

$$\not{P} - m_{\Delta} - m_{\text{Pol}}\sigma_6(P^2) - \sigma_1(P^2) = \not{P} - m_{\text{Pol}} \quad (6.13)$$

und somit

$$Z_{\Delta} = \frac{1}{1 - (\sigma_6(P^2) + \not{P}\sigma'_6(P^2) + \sigma'_1(P^2))} \Big|_{\not{P}=m_{\text{Pol}}}. \quad (6.14)$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \not{P}} = \frac{\partial P^2}{\partial \not{P}} \frac{\partial}{\partial P^2}. \quad (6.15)$$

Des weiteren gilt

$$\frac{\partial P^2}{\partial \not{P}} = 2\not{P}. \quad (6.16)$$

Somit ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \not{P}} = 2\not{P} \frac{\partial}{\partial P^2}. \quad (6.17)$$

Gleichung (6.14) läßt sich damit schreiben als

$$Z_\Delta = \frac{1}{1 - (\sigma_6(P^2) + 2P^2 \frac{\partial}{\partial P^2} \sigma_6(P^2) + 2\not{P} \frac{\partial}{\partial P^2} \sigma_1(P^2))} \Big|_{P^2=m_{\text{Pol}}^2}. \quad (6.18)$$

Dieser Ausdruck ist eigentlich von der Form

$$\frac{1}{1 - \hbar(\dots) + \mathcal{O}(\hbar^2)}. \quad (6.19)$$

Durch eine Entwicklung nach \hbar erhält man also

$$Z_\Delta = 1 + \sigma_6(P^2) + 2P^2 \frac{\partial}{\partial P^2} \sigma_6(P^2) + 2m_\Delta \frac{\partial}{\partial P^2} \sigma_1(P^2) + \mathcal{O}(\hbar^2) \Big|_{P^2=m_\Delta^2}. \quad (6.20)$$

An dieser Stelle wurde nun die Masse eingesetzt, wie weiter oben schon erläutert wurde. Parametrisiert man die Ergebnisse der Diagramme durch

$$\bar{\psi}_{\alpha,i} (\sigma_1 g^{\alpha\beta} + \sigma_6 \not{p} g^{\alpha\beta}) \text{Iso}^{ij} \psi_{\beta,j}, \quad (6.21)$$

mit dem Isospinanteil

$$\text{Iso}^{ij} = \delta^{ij} - \frac{1}{2} i \epsilon^{ijk} \tau_k, \quad (6.22)$$

so lauten die Ergebnisse für die Strukturen σ_1 und σ_6 in D Dimensionen im einzelnen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \frac{1}{288(D-1)F^2\pi^2 m_\Delta} \left\{ 10(D-2)p^2 B1_{\pi\Delta}^{(3)}(p) g_1^2 \right. \\ & + 5[(D-4)p^2 - Dm_\Delta^2] B0_{\pi\Delta}^{(2)}(p) g_1^2 \\ & \left. + (D-1)m_\Delta \left[12m_N B0_{\pi N}^{(2)}(p) g^2 + 5g_1^2 m_\Delta (B_{\pi\Delta}(p) M^2 + A_\Delta) \right] \right\}, \quad (6.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_6 = & \frac{1}{288(D-1)F^2\pi^2 m_\Delta^2} \left\{ 5(D-2)(p^2 + m_\Delta^2) B1_{\pi\Delta}^{(3)}(p) g_1^2 \right. \\ & + 5[(D-2)p^2 - 3Dm_\Delta^2] B0_{\pi\Delta}^{(2)}(p) g_1^2 \\ & + (D-1)m_\Delta^2 \left\{ 12 \left(B0_{\pi N}^{(2)}(p) + B1_{N\pi}^{(3)}(p) \right) g^2 \right. \\ & \left. \left. + 5g_1^2 \left[\left(B_{\pi\Delta}(p) - B1_{\pi\Delta}^{(1)}(p) \right) M^2 + 2A_\Delta - 2p^2 B1_{\pi\Delta}^{(2)}(p) \right] \right\} m_\Delta^2 \right\}. \quad (6.24) \end{aligned}$$

Die Definitionen der Integrale finden sich in Anhang E. Die Diagramme enthalten in dieser Form wieder zählschemaverletzende Beiträge. Im folgenden wird nun das EOMS-Renormierungsschema verwendet, um das Ergebnis konsistent mit dem Zählschema zu erhalten. Damit läßt sich die Wellenfunktionsrenormierungskonstante folgendermaßen darstellen:

$$Z_{\Delta} = 1 + \Sigma_{\text{Nukleon}} - \Sigma_{\text{Nukleon}}^{\text{EOMS}} + \Sigma_{\text{Delta}} - \Sigma_{\text{Delta}}^{\text{EOMS}}. \quad (6.25)$$

Hierbei stellen Σ_{Nukleon} und Σ_{Delta} die aus σ_1 und σ_6 abgeleiteten Beiträge des Diagramms mit innerer Nukleon- bzw. Deltalinie zu Z_{Δ} dar. Σ_i^{EOMS} bezeichnet jeweils die abzuziehenden Terme aus den Diagrammen. Die Ergebnisse lauten unter der Verwendung der Abkürzungen

$$\alpha = \ln \left(\sqrt{\frac{(M^2 + m_N^2 - m_{\Delta}^2)^2}{4M^2 m_N^2} - 1} - \frac{M^2 + m_N^2 - m_{\Delta}^2}{2M m_N} \right) \quad (6.26)$$

$$\beta = \sqrt{m_N^4 - 2(M^2 + m_{\Delta}^2)m_N^2 + (M^2 - m_{\Delta}^2)^2} \quad (6.27)$$

$$\gamma = \sqrt{4 - \frac{M^2}{m_{\Delta}^2}} \quad (6.28)$$

$$\delta = \sec^{-1} \left(\frac{2m_{\Delta}}{M} \right) \quad (6.29)$$

im einzelnen:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{Nukleon}} = & \frac{1}{27648F^2\pi^4\beta m_\Delta^6} \left\{ g^2 \left\{ 9i(i\alpha + \pi)m_\Delta^{10} + 12i(i\alpha + \pi)m_N m_\Delta^9 \right. \right. \\
& + 3 \left[7\alpha M^2 - 7i\pi M^2 + 5(\alpha - i\pi)m_N^2 - 32\pi^2\beta + \beta - 6\beta \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) \right. \\
& - 3\beta \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) \left. \right] m_\Delta^8 + 4m_N \left[3\alpha M^2 - 3i\pi M^2 + 3(\alpha - i\pi)m_N^2 \right. \\
& - 32\pi^2\beta - 6\beta \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) - 3\beta \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) \left. \right] m_\Delta^7 + \left\{ 6i(i\alpha + \pi)m_N^4 \right. \\
& + \beta \left[12 \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) + 6 \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) + 64\pi^2 + 3 \right] m_N^2 \\
& + M^2 \left[6\alpha M^2 - 6i\pi M^2 + 128\pi^2\beta + 9\beta + 24\beta \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) + 12\beta \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) \right] \left. \right\} m_\Delta^6 \\
& + 12m_N \left\{ 3(\alpha - i\pi)M^4 + 2\beta M^2 + 3(\alpha - i\pi)m_N^4 + 2 \left[(\alpha - i\pi)M^2 + \beta \right] m_N^2 \right\} m_\Delta^5 \\
& + 3 \left\{ 6(\alpha - i\pi)m_N^6 + \left[2(\alpha - i\pi)M^2 + (3 - 8\pi^2)\beta \right] m_N^4 \right. \\
& + 2 \left[5(\alpha - i\pi)M^4 + 3\beta M^2 \right] m_N^2 + M^4 \left[18i(i\alpha + \pi)M^2 + (-9 + 8\pi^2)\beta \right. \\
& + 6\beta \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) \left. \right\} m_\Delta^4 + 12m_N(m_N^2 - M^2) \left\{ 5i(i\alpha + \pi)m_N^4 \right. \\
& - \beta \left[3 \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) + 2 \right] m_N^2 + M^2 \left[5(\alpha - i\pi)M^2 + 2\beta - 3\beta \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) \right] \left. \right\} m_\Delta^3 \\
& + 3(M^2 - m_N^2)^2 \left\{ 11i(i\alpha + \pi)m_N^4 \right. \\
& + \left[6i(i\alpha + \pi)M^2 - 5\beta - 6\beta \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) \right] m_N^2 + M^2 \left[17(\alpha - i\pi)M^2 + 5\beta \right. \\
& - 12\beta \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) \left. \right\} m_\Delta^2 + 24m_N(m_N^2 - M^2)^3 \left[i(i\alpha + \pi)M^2 + (\alpha - i\pi)m_N^2 \right. \\
& + \beta \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) \left. \right] m_\Delta + 15(M^2 - m_N^2)^4 \left[i(i\alpha + \pi)M^2 + (\alpha - i\pi)m_N^2 \right. \\
& + \beta \ln\left(\frac{m_N}{M}\right) \left. \right\} \left. \right\} \tag{6.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{Delta}} = & \frac{1}{62208F^2\pi^4\gamma m_\Delta^7} \left\{ 5g_1^2 M^2 \left\{ 6\delta M^7 + 6\gamma \ln\left(\frac{m_\Delta}{M}\right) m_\Delta M^6 - 30\delta m_\Delta^2 M^5 \right. \right. \\
& + 6\gamma \left[1 - 3 \ln\left(\frac{m_\Delta}{M}\right) \right] m_\Delta^3 M^4 + 60\delta m_\Delta^4 M^3 + 9\gamma \left[4 \ln\left(\frac{m_\Delta}{M}\right) - 1 \right] m_\Delta^5 M^2 \\
& - 90\delta m_\Delta^6 M + \gamma \left[15 \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) - 30 \ln\left(\frac{m_\Delta}{M}\right) - 176\pi^2 + 30 \right] m_\Delta^7 \left. \right\} \left. \right\} \tag{6.31}
\end{aligned}$$



Abbildung 6.2: Diagramm für die Erzeugung der Abzugsterme der Wellenfunktionsrenormierungskonstante

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{Nukleon}}^{EOMS} = & \frac{1}{27648F^2\pi^4} \left\{ g^2 \left\{ \left[12 \ln \left(\frac{m_\Delta}{\mu} \right) + 208\pi^2 + 45 \right] m_N^2 \right. \right. \\
& - 8 \left[3 \ln \left(\frac{m_\Delta}{\mu} \right) + 64\pi^2 + 27 \right] m_\Delta m_N \\
& + 8 \left[3 \ln \left(\frac{m_\Delta}{\mu} \right) + 16\pi^2 - 3 \right] M^2 \\
& \left. \left. + 3 \left[-6 \ln \left(\frac{m_\Delta}{\mu} \right) + 40\pi^2 + 57 \right] m_\Delta^2 \right\} \right\} \quad (6.32)
\end{aligned}$$

$$\Sigma_{\text{Delta}}^{EOMS} = - \frac{5g_1^2 \left(-30 \ln \left(\frac{m_\Delta}{\mu} \right) + 208\pi^2 + 15 \right) M^2}{124416F^2\pi^4}. \quad (6.33)$$

Erzeugt werden die Abzugsterme durch das in Abbildung 6.2 aufgeführte Diagramm.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die $\gamma N \rightarrow \Delta$ -Übergangsformfaktoren in manifest lorentzinvarianter baryonischer chiraler Störungstheorie bis einschließlich Ordnung drei untersucht.

Ausgehend von der Idee, die Deltaresonanz zu berücksichtigen, wurde zuerst eine Möglichkeit gezeigt, wie man im Rahmen der chiralen Störungstheorie Mesonen und Baryonen beschreiben kann. Insbesondere der konsistente Einbau der Deltaresonanz, der in [WGS06] beschrieben wurde, war Ausgangspunkt für die hier durchgeführten Berechnungen. Für die Bestimmung der Formfaktoren muß man streng genommen den übergeordneten Prozess der Pionelektroproduktion untersuchen. Unter der Annahme der sogenannten Poldominanz konnte argumentiert werden, daß man eine Untersuchung des Prozesses auf den in Abbildung 5.1 gezeigten Beitrag zur Pionelektroproduktion beschränken kann. Durch die Verwendung des Watson-Theorems genügte es sogar, sich auf den Subprozess aus Abbildung 5.2 zu beschränken, da der Vertex $\Delta \rightarrow \pi N$ nur einen Phasenfaktor beitragen sollte. Bei der Berechnung der zu dem Prozess beitragenden Feynmandiagramme stellte der Stromerhalt eine wichtige Kontrollmöglichkeit dar. Somit lag eine überprüfbare Zwangsbedingung an die Ergebnisse vor, die auch verifiziert werden konnte. Basierend auf den Arbeiten von [JS72] und [GH06] wurden dann die Formfaktoren aus den Resultaten extrahiert. Wie in der chiralen Störungstheorie üblich, wurden dann die freien Parameter (aus den Baumbeiträgen) an die experimentellen Daten angepaßt. Es wurden hierfür zwei verschiedene Renormierungsschemata verwendet, nämlich das EOMS-Schema und die reformulierte IR. Dabei zeigte sich, daß die experimentellen Größen nur bedingt gut beschrieben wurden. Durch den Einbau eines Baumdiagramms mit einem inneren ρ^0 -Meson konnte die Qualität der Resultate dann noch verbessert werden. Im Rahmen der anzunehmenden Fehler beschreiben die Resultate

beider Renormierungsschemata die experimentellen Werte gut. Problematisch bleibt jedoch, daß die hier durchgeführte Rechnung die Unitarität des zugehörigen S-Matrixelementes nicht erreichen kann, da es sich um eine störungstheoretische Entwicklung handelt. Damit läßt sich wohl auch erklären, warum hier die Formfaktoren komplexe Größen sind. Vom experimentellen Standpunkt her, sind diese nämlich rein reelle Größen. Ein Vergleich mit anderen Rechnungen, welche zum Teil auf chiraler Störungstheorie basieren, zeigte auch, daß alle vergleichbar gute Vorhersagen liefern. Ein weiterer wichtiger Test, den die hier erzielten Ergebnisse zu erfüllen hatten, ist das Siegert-Theorem. Ein dynamisches Modell zur Beschreibung der Formfaktoren sollte die dort geforderten Vorhersagen auch erfüllen. Es zeigte sich, daß alle hier erzielten Resultate sämtliche überprüften Vorhersagen erfüllten. Zuletzt wurde noch die Wellenfunktionsrenormierungskonstante der Deltaresonanz im EOMS-Renormierungsschema bis einschließlich chiraler Ordnung drei berechnet. Diese wird prinzipiell bei der Berechnung physikalischer Größen benötigt.

Für die Formfaktoren lassen sich für zukünftige Untersuchungen sicherlich noch Verbesserungen erzielen, wenn man folgende Dinge zusätzlich in Betracht zieht. Zuerst wäre es interessant, die Baumbeiträge aus einer konsistent entwickelten Lagrangedichte abzuleiten und nicht nur deren Aussehen aus einfachen Überlegungen zu konstruieren. So ließe sich sicherlich auch eine Verbindung der auftretenden Kopplungskonstanten zu den Ergebnissen anderer Größen, wo diese Konstanten eingehen, ziehen. Dadurch hätte man eventuell auch eine bessere Aussagekraft über deren Genauigkeit. Außerdem sollte der Einbau des ρ^0 -Mesons auf eine konsistente Art und Weise erfolgen. So könnte man insbesondere auch Beiträge mit dem ρ -Meson in Schleifen untersuchen. Sicherlich erreicht man auch eine Verbesserung der Ergebnisse, wenn die Rechnungen bis zu einer höheren chiralen Ordnung durchgeführt werden. Allerdings steigt der Aufwand bei immer höheren Ordnungen enorm an. Dadurch könnte man jedoch feststellen, ob die Entwicklung der Störungsreihe konvergiert und wie gut die Konvergenz wäre. Besonders interessant wäre es überdies aber vor allem, den kompletten Prozess der Pionelektroproduktion zu untersuchen. Damit wäre man nicht mehr auf Näherungen angewiesen, durch die die Genauigkeit der Resultate verringert wird. Mit der Berechnung der Übergangsformfaktoren wurde nun der Grundstein für weitere Untersuchungen in diesem Sektor gelegt.

Anhang A

Notationen und Definitionen

- In dieser Arbeit werden natürliche Einheiten verwendet (d.h. $\hbar = c = 1$).
- Es gilt die Summenkonvention (d.h. über doppelt auftretende Indizes wird summiert).
- Die Paulimatrizen sind eine Darstellung der Generatoren der Gruppe $SU(2)$. Sie sind hermitesch und spurlos. Sie sind gegeben durch

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Sie erfüllen folgende weitere Beziehungen:

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \tau_k, \quad [\tau_i, \tau_j] = 2i \epsilon_{ijk} \tau_k, \quad \{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

- Die Diracmatrizen erfüllen folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}, & (\gamma^0)^2 &= I, & (\gamma^i)^2 &= -I, \\ (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0, & (\gamma^i)^\dagger &= -\gamma^i, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

wobei I eine D -dimensionale Einheitsmatrix darstellt. Des Weiteren gilt in D Dimensionen

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = D. \quad (\text{A.4})$$

In der Standarddarstellung in 4 Dimensionen sind die Dirac-Matrizen gegeben durch

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \tau^i \\ -\tau^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

hierbei bezeichnet 1_2 eine 2×2 -Einheitsmatrix. Weiterhin ist γ_5 allgemein definiert durch

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.6})$$

- Wichtige Beziehungen für den Deltapropagator und zwischen dem Deltapropagator und verschiedenen Lorentzstrukturen (für $A = -1$):

$$\begin{aligned} S_0^{\mu\nu} &= -\frac{\not{p} + m_\Delta}{p^2 - m_\Delta^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu}{D-1} - \frac{\gamma^\mu p^\nu - p^\nu\gamma^\mu}{(D-1)m_\Delta} - \frac{(D-2)p^\mu p^\nu}{(D-1)m_\Delta^2} \right), \\ &= -\left(g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu}{D-1} - \frac{\gamma^\mu p^\nu - p^\nu\gamma^\mu}{(D-1)m_\Delta} - \frac{(D-2)p^\mu p^\nu}{(D-1)m_\Delta^2} \right) \frac{\not{p} + m_\Delta}{p^2 - m_\Delta^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu S_0^{\mu\nu} &= \frac{D-2}{(D-1)m_\Delta^2} p^\nu - \frac{\gamma^\nu}{(D-1)m_\Delta}, \\ &= S_0^{\nu\mu} \gamma_\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$p_\mu S_0^{\mu\nu} = \frac{(D-2)\not{p} + (D-1)m_\Delta}{(D-1)m_\Delta^2} p^\nu - \frac{\not{p}}{(D-1)m_\Delta} \gamma^\nu, \quad (\text{A.9})$$

$$S_0^{\nu\mu} p_\mu = \frac{(D-2)\not{p} + (D-1)m_\Delta}{(D-1)m_\Delta^2} p^\nu - \gamma^\nu \frac{\not{p}}{(D-1)m_\Delta}. \quad (\text{A.10})$$

Anhang B

Lorentzstrukturen der Diagramme der Formfaktoren

Die Diagramme für die Berechnung der $\gamma N\Delta$ -Übergangsformfaktoren besitzen zwei freie Lorentzindizes (α und μ). Da es drei äußere Impulse gibt, sind wegen Impulserhaltung nur zwei davon unabhängig ($p_i^\mu + q^\mu = p_f^\mu$). Aus diesen Voraussetzungen ergeben sich alle theoretisch möglichen Lorentzstrukturen aus kombinatorischen Überlegungen. Wenn man den einlaufenden Nukleonimpuls p_i und den Impuls des virtuellen Photons q als unabhängig wählt, erhält man zunächst folgende Strukturen

$$\begin{aligned}
 &\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_5, & \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_5, & \gamma^\alpha p_i^\mu \gamma_5, & \gamma^\mu p_i^\alpha \gamma_5, \\
 &p_i^\alpha p_i^\mu \gamma_5, & p_i^\alpha q^\mu \gamma_5, & p_i^\mu q^\alpha \gamma_5, & q^\alpha q^\mu \gamma_5, \\
 & & g^{\alpha\mu} \gamma_5, & \gamma^\alpha q^\mu \gamma_5, & \gamma^\mu q^\alpha \gamma_5.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Wegen der Impulserhaltung läßt sich jedoch folgende Umformung durchführen

$$p_i^\alpha p_i^\mu = (p_f^\alpha - q^\alpha) p_i^\mu = -p_i^\mu q^\alpha, \tag{B.2}$$

da $\psi_\alpha p_f^\alpha = 0$, wie sich ausgehend von Gleichung (3.3) mit ein paar Schritten zeigen läßt. Somit ist die Struktur $p_i^\alpha p_i^\mu$ durch die Struktur $p_i^\mu q^\alpha$ ausdrückbar und die Anzahl unabhängiger Strukturen reduziert sich. Außerdem fallen aufgrund der Zwangsbedingung (3.2) alle Terme mit γ^α weg. Der Term $\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_5$ ist wegen der Beziehung $\gamma^\mu \gamma^\alpha + \gamma^\mu \gamma^\alpha = 2g^{\alpha\mu}$ durch den Term $g^{\alpha\mu} \gamma_5$ darstellbar ($\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_5$ ist wie schon erwähnt auch identisch 0). Somit bleiben letztendlich die Lorentzstrukturen

$$g^{\alpha\mu} \gamma_5, \quad q^\alpha p_i^\mu \gamma_5, \quad q^\alpha q^\mu \gamma_5, \quad q^\alpha \gamma^\mu \gamma_5, \tag{B.3}$$

deren vier Koeffizienten sich zu drei linear unabhängigen reduzieren lassen, wie im folgenden gezeigt wird.

Multipliziert man nun das Matrixelement (parametrisiert mit diesen Lorentzstrukturen, siehe Gleichung (5.20)) mit dem Vierervektor q^μ durch, so erhält man

$$\bar{\psi}_\alpha(p_f) (D_1 + D_2 q \cdot p_i + D_3 q^2 + D_4 \not{q}) q^\alpha \gamma_5 \psi(p_i) = 0, \quad (\text{B.4})$$

und somit

$$D_1 + D_2 q \cdot p_i + D_3 q^2 + D_4(m_\Delta + m_N) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Damit hat man eine Zwangsbedingung für die Koeffizienten. Dies stellt eine hervorragende Möglichkeit dar, die angestellten Berechnungen zu überprüfen. Durchgeführt wurde dies sowohl numerisch, als auch analytisch für die in dieser Arbeit berechneten Diagramme. Auf beide Arten konnte der Stromerhalt nachgewiesen werden.

Anhang C

Isospinstruktur der Diagramme der Formfaktoren

Das Matrixelement $\langle \Delta | J^\mu(0) | N \rangle$ enthält eine Isospinstruktur, die mathematisch beschreibt, welche physikalischen Prozesse möglich sind. Da das Photon bei der Wechselwirkung mit dem Nukleon keine Ladung überträgt, sind das einfach folgende beiden Prozesse:

$$\gamma + p \rightarrow \Delta^+, \quad (\text{C.1})$$

$$\gamma + n \rightarrow \Delta^0. \quad (\text{C.2})$$

In Kapitel 3.3 wurden der Isospin des Delta, sowie dessen mathematische Beschreibung mittels Isospinkopplung und Clebsch-Gordan-Koeffizienten erklärt. Man betrachte nun den Ausdruck, der das Übergangsmatrixelement $\langle \Delta | J^\mu(0) | N \rangle$ repräsentiert:

$$\langle \Delta | J^\mu(0) | N \rangle = \bar{\psi}_j^\alpha(p_f) D^{\alpha\mu} \text{Iso}^j \psi(p_i) \epsilon_\mu. \quad (\text{C.3})$$

Der Fokus soll nun an dieser Stelle auf den Isospinanteil dieses Ausdrucks gelegt werden, d.h. man möchte folgendes Objekt im Isospinraum auswerten:

$$\bar{\psi}_{i,\alpha} P_{ij\alpha\beta}^{3/2} \text{Iso}^j \psi_\beta, \quad (\text{C.4})$$

$P_{ij}^{3/2}$ stellt den Projektionsoperator dar, welcher die Isospin- $\frac{3}{2}$ -Komponenten herausprojiziert. Des weiteren liefert die Berechnung der Diagramme

$$\text{Iso}_j = -i\epsilon_{3jk} \tau^k + 2\delta_{3j}. \quad (\text{C.5})$$

Nun benötigt man, daß das Nukleon ein Isospindublett ist, d.h. $\psi_\beta = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$, sowie die in Kapitel 3.3 hergeleiteten Formeln und Zusammenhänge (insbesondere Gleichung (3.14)). Einsetzen und Auswerten liefert nun wie erwartet

folgenden Zusammenhang:

$$\bar{\psi}_{\mu,i,\alpha} P_{ij\alpha\beta}^{3/2} \text{ Iso}^j \psi_\beta = \overline{\begin{pmatrix} \Delta_\mu^+ \\ \Delta_\mu^0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Dies stimmt mit den Gleichungen (C.1) und (C.2) überein, daß nur die dort beschriebenen Übergänge möglich sind. Der Faktor $\sqrt{\frac{2}{3}}$ stellt dabei einen Clebsch-Gordan-Koeffizienten für das Matrixelement dar.

Anhang D

Beiträge der Baumdiagramme

D.1 $N\gamma \rightarrow \Delta$ -Baumdiagramm

In erster chiraler Ordnung existiert aus der gegebenen Lagrangedichte kein Beitrag zum Matrixelement. In zweiter und dritter Ordnung lag allerdings keine Lagrangedichte für den Baumgraphen vor. Aufgrund der Eigenschaften des Matrixelements und der chiralen Störungstheorie kann jedoch die funktionale Abhängigkeit der Baumbeiträge berechnet werden, wobei die auftretenden Konstanten an das Experiment angepaßt werden müssen. Den Ansatz für die Baumbeiträge erhält man folgendermaßen: Aus der Berechnung und letztendlich der Festlegung der Lorentzstrukturen der Schleifendiagramme, müssen die gleichen Lorentzstrukturen auch bei den Baumbeiträgen auftreten. Nun muß man die chirale Ordnung dieser Lorentzstrukturen beachten (der Polarisationsvektor ϵ_μ wird als $\mathcal{O}(q^1)$ gezählt):

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu}\gamma_5\epsilon_\mu &= \mathcal{O}(q^2), \\ q^\alpha p_i^\mu \gamma_5\epsilon_\mu, \quad q^\alpha \gamma^\mu \gamma_5\epsilon_\mu &= \mathcal{O}(q^3), \\ q^\alpha q^\mu \gamma_5\epsilon_\mu &= \mathcal{O}(q^4). \end{aligned} \tag{D.1}$$

Damit sind Baumbeiträge mit $q^\alpha q^\mu \gamma_5\epsilon_\mu$ bereits von höherer Ordnung. Ein allgemeiner Ansatz für die Baumbeiträge ist nun

$$\mathcal{B}_{\Delta N\gamma}^{\alpha(2)} = A_1 g^{\alpha\mu} \gamma_5 \epsilon_\mu, \tag{D.2}$$

$$\mathcal{B}_{\Delta N\gamma}^{\alpha(3)} = A_2 p_i \cdot q g^{\alpha\mu} \gamma_5 \epsilon_\mu + A_3 q^\alpha p_i^\mu \gamma_5 \epsilon_\mu + A_4 q^\alpha \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_\mu. \tag{D.3}$$

Die Zahl in der hochgestellten Klammer gibt die chirale Ordnung der Terme an. Im Prinzip wäre auch ein Term $A_5 q^\alpha \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_\mu$ denkbar, wobei q^1 eine weitere Größe mit chiraler Ordnung eins ist (z.B. $m_\Delta - m_N$). Solche Terme lassen sich aber mit dem Term $A_1 g^{\alpha\mu} \gamma_5 \epsilon_\mu$ zusammenfassen, weswegen sie nicht explizit berücksichtigt werden. Die so parametrisierten Terme müssen nun auch

den Stromerhalt erfüllen. Dadurch erhält man Beziehungen zwischen den einzelnen Konstanten. Als Resultat wird hier die gleiche Parametrisierung wie in [GH06] verwendet:

$$\mathcal{B}_{\Delta N \gamma}^\alpha = i\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e}{2m_N} \left([A(m_\Delta + m_N) - B \frac{p_i \cdot q}{4m_N}] g^{\alpha\mu} - \frac{B}{2m_N} q^\alpha p_i^\mu + A q^\alpha \gamma^\mu \right) \gamma_5 \epsilon_\mu. \quad (\text{D.4})$$

D.2 ρ^0 -Meson-Baumdiagramm

Man kann zusätzlich die Möglichkeit berücksichtigen, daß sich ein ρ^0 -Meson aus dem Photon bildet und an den Nukleon-Delta-Übergang ankoppelt. Nun soll dieses Diagramm auf Baumgraphenniveau beschrieben werden. Die Idee dabei ist, daß die Kopplung des ρ^0 an den Nukleon-Delta-Übergang die gleiche Form hat, wie die $\gamma N \rightarrow \Delta$ -Kopplung (Gleichung (D.4)). Zusätzlich muß noch die Kopplung zwischen Photon und ρ^0 -Meson beschrieben werden. Diese neue Kopplung wird durch einen Term

$$\sim g^{\mu\kappa} \quad (\text{D.5})$$

beschrieben. Außerdem wird noch der Propagator des ρ^0 -Mesons in diesem Diagramm benötigt. Als weiterer Faktor für den gesamten Graphen entsteht somit ein Ausdruck der Form

$$\frac{\left(g^{\lambda\kappa} - \frac{q^\lambda q^\kappa}{M_\rho^2} \right)}{q^2 - M_\rho^2}. \quad (\text{D.6})$$

Man beachte, daß eigentlich noch eine Kopplungskonstante für die Kopplung des ρ^0 an das Photon benötigt wird. Auch im Vertex, der die Kopplung zwischen ρ^0 , Nukleon und Delta beschreibt tritt eine weitere Kopplungskonstante auf. Beide sind jedoch hier nicht angegeben. Man benötigt nämlich keine explizite Form für sie, da diese Kopplungskonstanten mit den Kopplungskonstanten des restlichen Vertex multipliziert werden. Diese müssen aber alle an das Experiment angepaßt werden, so daß man deren Produkt einfach als jeweils eine neue Kopplungskonstante definieren kann. Da die $N\rho\Delta$ -Kopplung die gleiche Struktur wie die $N\gamma\Delta$ -Kopplung besitzt, erhält man in Analogie zu Gleichung (D.4) also als Resultat für das Diagramm aus Abbildung 5.12:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Delta N \gamma \rho}^\alpha = & i\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e}{2m_N} \left(\left[A_2(m_\Delta + m_N) - B_2 \frac{p_i \cdot q}{4m_N} \right] g^{\alpha\lambda} - \frac{B_2}{2m_N} q^\alpha p_i^\lambda + A_2 q^\alpha \gamma^\lambda \right) \\ & \times \left(g_{\lambda\kappa} - \frac{q_\lambda q_\kappa}{M_\rho^2} \right) \frac{g^{\mu\kappa}}{q^2 - M_\rho^2} \gamma_5 \epsilon_\mu. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Anhang E

Schleifenintegrale

Hier werden alle in der Arbeit benötigten Integrale angegeben. Für die Integrale, die bei den Formfaktoren auftreten, werden hier jeweils nur die skalaren Strukturen angegeben. Als Index sind jeweils Symbole angegeben, welche die im Integral vorkommenden Massen bezeichnen ($\pi \hat{=} M, N \hat{=} m_N, \Delta \hat{=} m_\Delta$). Bei der Wellenfunktionsrenormierungskonstante tauchen auch Tensorintegrale höherer Stufe explizit auf. Weiter unten werden auch diese definiert.

Integrale mit einem Nenner:

$$A_a = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m_a^2 + i0^+}, \quad a \in (\pi, N, \Delta). \quad (\text{E.1})$$

Integrale mit zwei Nennern:

$$B_{a,b}(p) = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_a^2 + i0^+)((p+k)^2 - m_b^2 + i0^+)}, \quad (\text{E.2})$$

$(a, b) \in (\pi, N, \Delta).$

Integrale mit drei Nennern:

$$C_{a,b,c}(p, q) = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_a^2 + i0^+)((p+k)^2 - m_b^2 + i0^+)(q+k)^2 - m_c^2 + i0^+}, \quad (\text{E.3})$$

$(a, b, c) \in (\pi, N, \Delta).$

Die Ergebnisse dieser Integrale werden für die Formfaktoren numerisch ausgewertet. Für die Wellenfunktionsrenormierungskonstante werden auch analytische Ausdrücke benötigt. Deswegen sind im folgenden die dafür benötigten

Ergebnisse explizit angeben:

$$\begin{aligned}
A_M &= i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+} \\
&= 2M^2 \bar{\lambda} + \frac{M^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{M}{\mu}\right), \tag{E.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{M_1, M_2}(p) &= i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k+p)^2 - M_1^2 + i0^+][k^2 - M_2^2 + i0^+]} \\
&= 2\bar{\lambda} + \frac{1}{16\pi^2} \left[-1 + \frac{p^2 - M_1^2 + M_2^2}{p^2} \ln\left(\frac{M_2}{\mu}\right) + \frac{2M_1 M_2}{p^2} F(\Omega) \right]. \tag{E.5}
\end{aligned}$$

Der Parameter μ ist der t'Hooft-Parameter. Des weiteren gilt

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{D-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1] \right). \tag{E.6}$$

$$\begin{aligned}
F(\Omega) &= \sqrt{\Omega^2 - 1} \ln(-\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1}), & \Omega \leq -1 \\
&= \sqrt{\Omega^2 - 1} \arccos(-\Omega), & 1 \leq \Omega \leq 1 \\
&= \sqrt{\Omega^2 - 1} \ln(-\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1}) - i\pi\sqrt{\Omega^2 - 1}, & 1 \leq \Omega \tag{E.7}
\end{aligned}$$

$$\Omega = \frac{p^2 - M_1^2 - M_2^2}{2M_1 M_2}. \tag{E.8}$$

Man beachte folgende Beziehungen zwischen den höheren Tensorintegra-

len und den oben angegebenen skalaren Integralen:

$$B1_{M_1, M_2}^{(1)}(p) = \frac{A_{M_1} - A_{M_2} - (p^2 + M_1^2 - M_2^2) B_{M_1, M_2}(p)}{2p^2}, \quad (\text{E.9})$$

$$B0_{M_1 M_2}^{(2)}(p) = \frac{1}{6} \left(2B_{M_1, M_2}(p) M_1^2 + A_{M_2} + \frac{1}{3} (-p^2 + 3M_1^2 + 3M_2^2) \right. \\ \left. + \frac{(p^2 + M_1^2 - M_2^2) (A_{M_1} - A_{M_2} - (p^2 + M_1^2 - M_2^2) B_{M_1, M_2}(p))}{2p^2} \right), \quad (\text{E.10})$$

$$B1_{M_1 M_2}^{(2)}(p) = \frac{1}{2p^2} \left(A_{M_2} - \frac{(p^2 + M_1^2 - M_2^2) (A_{M_1} - A_{M_2} - (p^2 + M_1^2 - M_2^2) B_{M_1, M_2}(p))}{2p^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(-2B_{M_1, M_2}(p) M_1^2 - A_{M_2} + \frac{1}{3} (p^2 - 3M_1^2 - 3M_2^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(p^2 + M_1^2 - M_2^2) (A_{M_1} - A_{M_2} - (p^2 + M_1^2 - M_2^2) B_{M_1, M_2}(p))}{2p^2} \right) \right), \quad (\text{E.11})$$

$$B1_{M_1 M_2}^{(3)}(p) = \frac{1}{8} \left\{ \frac{(A_{M_1} - A_{M_2} - (p^2 + M_1^2 - M_2^2) B_{M_1, M_2}(p)) M_1^2}{p^2} \right. \\ \left. - A_{M_2} + \frac{1}{6} (p^2 - 2M_1^2 - 4M_2^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2p^2} \left\{ (p^2 + M_1^2 - M_2^2) \left\{ A_{M_2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(p^2 + M_1^2 - M_2^2) (A_{M_1} - A_{M_2} - (p^2 + M_1^2 - M_2^2) B_{M_1, M_2}(p))}{2p^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \left\{ -2B_{M_1, M_2}(p) M_1^2 - A_{M_2} + \frac{1}{3} (p^2 - 3M_1^2 - 3M_2^2) \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(p^2 + M_1^2 - M_2^2) [A_{M_1} - A_{M_2} - (p^2 + M_1^2 - M_2^2) B_{M_1, M_2}(p)]}{2p^2} \right\} \right\} \right\}. \quad (\text{E.12})$$

Anhang F

Abzugsterme in Infrarotrenormierung

Dies sind die Abzugsterme im reformulierten Infrarotrenormierungsschema bis einschließlich Ordnung drei für die in dieser Arbeit benötigten Integrale:

$$R_\pi = 0, \quad (\text{F.1})$$

$$R_N = -2 \left(16\pi^2\lambda + \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) \right) m_N^2, \quad (\text{F.2})$$

$$R_\Delta = -\frac{1}{3m_N} \left[m_N^3 - 6m_\Delta m_N^2 + 3 \left(32\pi^2\lambda + 2 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 1 \right) m_\Delta^2 m_N + 2m_\Delta^3 \right], \quad (\text{F.3})$$

$$R_{\pi\pi}(q) = 0, \quad (\text{F.4})$$

$$R_{\pi N}(p_f) = \frac{1}{4m_N^6} \left\{ -5 \left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 1 \right) m_N^6 + \left[4 \left(32\pi^2\lambda + 2 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 3 \right) M^2 + \left(384\pi^2\lambda + 24 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 1 \right) m_\Delta^2 \right] m_N^4 - m_\Delta^2 \left[2 \left(32\pi^2\lambda + 2 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 3 \right) M^2 + \left(256\pi^2\lambda + 16 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 3 \right) m_\Delta^2 \right] m_N^2 + \left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 1 \right) m_\Delta^6 \right\}, \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned}
R_{\pi\Delta}(p_f) = & - \frac{1}{12m_N^6} \left\{ \left(192\pi^2\lambda + 12 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 23 \right) m_N^6 \right. \\
& + 6 \left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 7 \right) \\
& \times m_\Delta m_N^5 \\
& + 3 \left[\left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 29 \right) m_\Delta^2 \right. \\
& - 8 \left(16\pi^2\lambda + \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 1 \right) M^2 \left. \right] m_N^4 \\
& + 4m_\Delta \left(-3M^2 - \left(192\pi^2\lambda + 12 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 1 \right) m_\Delta^2 \right) m_N^3 \\
& + 3m_\Delta^2 \left[\left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 6 \right) M^2 \right. \\
& + \left. \left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 19 \right) m_\Delta^2 \right] m_N^2 \\
& + 6 \left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 5 \right) m_\Delta^5 m_N \\
& \left. - 3 \left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 1 \right) m_\Delta^6 \right\}, \tag{F.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\pi\Delta}(p_i) = & - \frac{1}{6m_N^3} \left[\left(96\pi^2\lambda + 6 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 1 \right) m_N^3 - 12m_\Delta m_N^2 \right. \\
& \left. + 3 \left(32\pi^2\lambda + 2 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 1 \right) (m_\Delta^2 - M^2) m_N + 4m_\Delta^3 - 6M^2 m_\Delta \right], \tag{F.7}
\end{aligned}$$

$$R_{NN}(q) = \frac{q^2 - 6 \left(32\pi^2\lambda + 2 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 1 \right) m_N^2}{6m_N^2}, \tag{F.8}$$

$$R_{\pi N}(p_f) = - \frac{\left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 2 \right) m_N^2 - \left(32\pi^2\lambda + 2 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 3 \right) M^2}{2m_N^2}, \tag{F.9}$$

$$\begin{aligned}
R_{\Delta\Delta}(q) = & - \frac{1}{6\pi^2 m_N^3} \left((4 \left(48\pi^2 \lambda + 3 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 4 \right) m_N^3 + 36 m_\Delta m_N^2 \right. \\
& \left. - 18 m_\Delta^2 m_N + 4 m_\Delta^3 + q^2 (2m_\Delta - 3m_N) \right), \quad (\text{F.10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\pi N \pi}(-p_i, q) = & - \frac{1}{36 m_N^8} \left\{ -5 \left(240\pi^2 \lambda + 15 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 23 \right) m_N^6 \right. \\
& + \left[21M^2 + \left(1104\pi^2 \lambda + 69 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 110 \right) m_\Delta^2 \right] m_N^4 \\
& + q^2 \left(96\pi^2 \lambda + 6 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 11 \right) (m_\Delta^2 - 2m_N^2) m_N^2 \\
& + m_\Delta^2 \left[-9M^2 - \left(624\pi^2 \lambda + 39 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 64 \right) m_\Delta^2 \right] m_N^2 \\
& \left. + 3 \left(48\pi^2 \lambda + 3 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 5 \right) m_\Delta^6 \right\}, \quad (\text{F.11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\pi\Delta\pi}(-p_i, q) = & - \frac{1}{36 m_N^8} \left\{ 3 \left(48\pi^2 \lambda + 3 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 5 \right) m_\Delta^6 \right. \\
& - 18 m_N m_\Delta^5 - 13 \left(48\pi^2 \lambda + 3 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 4 \right) m_N^2 m_\Delta^4 \\
& + 72 m_N^3 m_\Delta^3 + m_N^2 \left[\left(96\pi^2 \lambda + 6 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 11 \right) q^2 \right. \\
& + \left. \left(1104\pi^2 \lambda + 69 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 56 \right) m_N^2 - 9M^2 \right] m_\Delta^2 \\
& - 6 m_N^3 (q^2 + 17m_N^2 + 2M^2) m_\Delta \\
& - m_N^4 \left[4 \left(48\pi^2 \lambda + 3 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 4 \right) q^2 \right. \\
& \left. \left. + 25 \left(48\pi^2 \lambda + 3 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 1 \right) m_N^2 - 33M^2 \right] \right\}, \quad (\text{F.12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\pi\Delta\Delta}(p_i, p_f) = & - \frac{1}{48m_N^8} \left\{ - \left(192\pi^2\lambda + 12 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 17 \right) m_\Delta^6 \right. \\
& + 32m_N m_\Delta^5 + \left(832\pi^2\lambda + 52 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 63 \right) m_N^2 m_\Delta^4 - 128m_N^3 m_\Delta^3 \\
& - m_N^2 \left[2 \left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 3 \right) q^2 \right. \\
& + \left. \left(1472\pi^2\lambda + 92 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 147 \right) m_N^2 - 16M^2 \right] m_\Delta^2 \\
& + 32m_N^3 (q^2 + 13m_N^2 + M^2) m_\Delta \\
& + m_N^4 \left[2 \left(128\pi^2\lambda + 8 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 13 \right) q^2 \right. \\
& + \left. \left. 5 \left(320\pi^2\lambda + 20 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 39 \right) m_N^2 - 72M^2 \right] \right\}, \tag{F.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\pi NN}(p_i, p_f) = & - \frac{1}{48m_N^8} \left\{ - \left(192\pi^2\lambda + 12 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 17 \right) m_\Delta^6 \right. \\
& + 32m_N m_\Delta^5 + \left(832\pi^2\lambda + 52 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 63 \right) m_N^2 m_\Delta^4 \\
& - 128m_N^3 m_\Delta^3 - m_N^2 \left[2 \left(64\pi^2\lambda + 4 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 3 \right) q^2 \right. \\
& + \left. \left(1472\pi^2\lambda + 92 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) + 147 \right) m_N^2 - 16M^2 \right] m_\Delta^2 \\
& + 32m_N^3 (q^2 + 13m_N^2 + M^2) m_\Delta \\
& + m_N^4 \left[2 \left(128\pi^2\lambda + 8 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 13 \right) q^2 \right. \\
& + \left. \left. 5 \left(320\pi^2\lambda + 20 \ln \left(\frac{m_N}{\mu} \right) - 39 \right) m_N^2 - 72M^2 \right] \right\}. \tag{F.14}
\end{aligned}$$

Anhang G

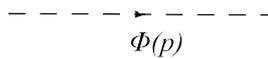
Feynmanregeln

Die in dieser Arbeit benötigten Feynmanregeln sind im folgenden angegeben. Sie leiten sich aus den Lagrangedichten ab, welche in den Kapiteln 4.2, 4.3 sowie 4.4 angegeben wurden. In den Diagrammen werden Nucleonen durch durchgezogene Linien, Deltas durch doppelte Linien und Pionen durch gestrichelte Linien dargestellt. Die Pfeile an den Linien stellen jeweils die Impulsrichtung des entsprechenden Teilchens dar. Die eingekreiste Zahl im jeweiligen Vertex stellt dessen chirale Ordnung dar. Außerdem gelten folgende Bezeichnungen:

$\psi(p)$: Nukleon mit Impuls p

$\psi_j^\alpha(p)$: Delta mit Isospinindex j , Lorentzindex α und Impuls p

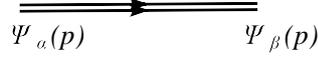
$\Phi^a(p)$: Pion mit Isospinindex a und Impuls p



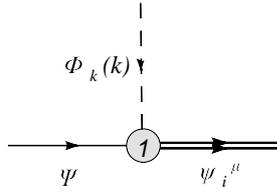
$$\frac{i}{p^2 - M^2 + i0^+}$$



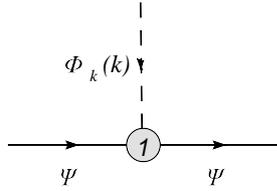
$$\frac{i}{\not{p} - m_N + i0^+}$$



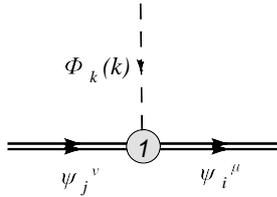
$$-i \frac{\not{p} + m_\Delta}{p^2 - m_\Delta^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{D-1} - \frac{\gamma^\mu p^\nu - p^\nu \gamma^\mu}{(D-1)m_\Delta} - \frac{(D-2)p^\alpha p^\beta}{(D-1)m_\Delta^2} \right)$$



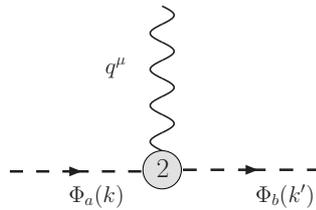
$$-\frac{g}{F} (k^\mu + \tilde{z} \gamma^\mu \not{k}) (\delta_{ik} - \frac{1}{3} \tau_i \tau_k)$$



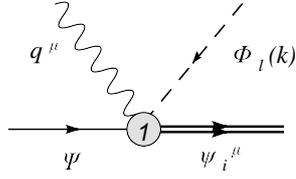
$$\frac{1}{2F} g_A \not{k} \gamma_5 \tau_k$$



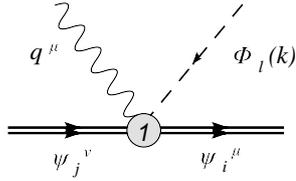
$$-\frac{1}{2F} (g_1 g^{\mu\nu} \not{k} \gamma_5 + g_2 (\gamma^\mu k^\nu + k^\mu \gamma^\nu) \gamma_5 + g_3 \gamma^\mu \not{k} \gamma_5 \gamma^\nu) \left(\frac{5}{9} i \epsilon_{ijk} + \frac{1}{9} \delta_{jk} \tau_i + \frac{1}{9} \delta_{ik} \tau_j - \frac{4}{9} \delta_{ij} \tau_k \right)$$



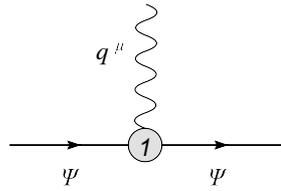
$$e \epsilon_{ab3} (k^\mu + k'^\mu)$$



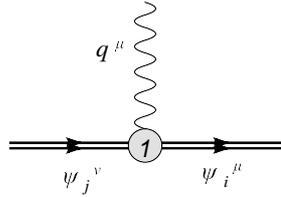
$$\frac{ieg}{F} \epsilon_{3lm} (\delta_{jm} - \frac{1}{3} \tau_j \tau_m) (g^{\beta\nu} + \frac{3A+1}{2} \gamma^\beta \gamma^\nu)$$



$$\left[\frac{ie}{2F} \epsilon_{3ml} (\delta_{jr} - \frac{1}{3} \tau_j \tau_r) \tau^m (\delta_{ri} - \frac{1}{3} \tau_r \tau_i) \right] (g_1 g^{\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma_5 + g_2 (\gamma^\beta g^{\alpha\mu} + \gamma^\alpha g^{\beta\mu}) \gamma_5 + g_3 \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\alpha)$$



$$-ie \gamma^\mu \frac{\tau_3 + 1}{2}$$



$$\frac{1}{2} ie \left\{ (\delta_{jr} - \frac{1}{3} \tau_j \tau_r) \left[(1 + \tau_3) \delta_{rk} - 2i \epsilon_{rk3} \right] (\delta_{ki} - \frac{1}{3} \tau_k \tau_i) \right\} (g^{\alpha\beta} \gamma^\mu - g^{\beta\mu} \gamma^\alpha - g^{\alpha\mu} \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha)$$

Literaturverzeichnis

- [Ams+08] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).
- [And+52] H. L. Anderson, E. Fermi, E. A. Long, D. E. Nagle, Phys. Rev. **85**, 936 (1952).
- [Ash+67] W. W. Ash *et al.*, Phys. Lett. B **24**, 165 (1967).
- [Bät+72] K. Bätzner *et al.*, Phys. Lett. B **39**, 575 (1972).
- [Bec+00] R. Beck *et al.*, Phys. Rev. C **61**, 035204 (2000).
- [Ber+92] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor, U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **B388**, 315 (1992).
- [Ber02] A. M. Bernstein, Eur. Phys. J. A **17**, 349 (2003)
- [Ber06] C. Berger, Elementarteilchenphysik (Springer, 2006).
- [BKM96] V. Bernard, N. Kaiser and U. G. Meissner, Nucl. Phys. A **611**, 429 (1996).
- [BL99] T. Becher, H. Leuwyler, Eur. Phys. J. **C9**, 643 (1999).
- [Che+57] G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low, Y. Nambu, Phys. Rev. **106**, 1337 (1957).
- [Col66] S. Coleman, J. Math. Phys. **7**, 787 (1966).
- [Col84] J. Collins, Renormalization (Cambridge U.K.: University Press, 1984).
- [DKT07] D. Drechsel, S.S. Kamalov, L. Tiator, Eur. Phys. J. A **34**, 69 (2007).
- [DT92] D. Drechsel and L. Tiator, J. Phys. G **18**, 449 (1992).

- [DT07] D. Drechsel and L. Tiator, AIP Conf. Proc. **904**, 129 (2007).
- [Els06] D. Elsner et al., Eur. Phys. J. A **27**, 91 (2006).
- [ET98] P. J. Ellis, H. B. Tang, Phys. Rev. C **57**, 3356 (1998).
- [Fuc+03] T. Fuchs, J. Gegelia, G. Japaridze, S. Scherer, Phys. Rev. D **68**, 056005 (2003).
- [GH06] T. A. Gail, T. R. Hemmert, Eur. Phys. J. A **28**, 91 (2006).
- [GL84] J. Gasser, H. Leutwyler, Annals. Phys. **158**, 142 (1984).
- [GL85] J. Gasser, H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B250**, 465 (1985).
- [Gol61] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [GSS88] J. Gasser, M. E. Sainio, A. Švarc, Nucl. Phys. **B307**, 779 (1988).
- [GW67] M. L. Goldberger, K. M. Watson, Collision Theory, (Wiley, New York (1967), S. 518).
- [GW73] D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [Hac+05] C. Hacker, N. Wies, J. Gegelia and S. Scherer, Phys. Rev. C **72**, 055203 (2005)
- [HHK98] T. R. Hemmert, B. R. Holstein, J. Kambor, J. Phys. G **24**, 1831 (1998).
- [HP99] T. Hahn and M. Perez-Victoria, Comput. Phys. Commun. **118**, 153-165 (1999).
- [JS72] H.F. Jones, M.D. Scadron, Annals Phys. **81**,1 (1973).
- [KOS61] S. Kamefuchi, L. O’Raifeartaigh, A. Salam, Nucl. Phys. **28**, 529 (1961).
- [Kra90] A. Krause, Helv. Phys. Acta **63**, 3 (1990).
- [Mer+01] C. Mertz et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 2963 (2001).
- [NEK71] L. M. Nath, B. Etemadi, J. D. Kimel, Phys. Rev. D **3**, 2153 (1971).

- [NP86] J. V. Narlikar, T. Padmanabhan, Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology (D. Reidel Publishing, 1986).
- [Pil05] T. Pilling, Int. J. Mod. Phys. A **20**, 2715 (2005).
- [POS+01] Th. Pospischil et. al., Phys. Rev. Lett. **86**, 2959 (2001).
- [Pov+06] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, Teilchen und Kerne (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 2006).
- [PP03] V. Pascalutsa, D. R. Phillips, Phys. Rev. C **67**, 055202 (2003).
- [PS97] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory (Reading, USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1997).
- [PV79] G. Passarino and M. J. Veltman, Nucl. Phys. **B160**, 151 (1979).
- [PV07] V. Pascalutsa, M. Vanderhaeghen, in Proc. of Shape of Hadrons, eds. C. N. Papanicolas and A. M. Bernstein, AIP (2007).
- [RS41] W. Rarita, J. Schwinger, Phys. Rev. **60**, 61 (1941).
- [Ryd85] L.H. Ryder, Quantum Field Theory (Cambridge University Press, Cambridge 1985).
- [Sch03] S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **27**, 277 (2003).
- [Sch07] S. Scherer, *Gruppentheorie in der Physik I und II* (Mainz, WS 2006/2007 und SS 2007).
- [SGS04] M. R. Schindler, J. Gegelia, S. Scherer, Phys. Lett. B **586**, 258 (2004).
- [SK91] S. Scherer and J. H. Koch, Nucl. Phys. A **534**, 461 (1991).
- [Sta+06] Stave et. al, Phys. Rev. C **78**, 025209 (2008).
- [Tan96] H. B. Tang, hep-ph/9607436.
- [TE96] H. B. Tang, P. J. Ellis, Phys. Lett. B **387**, 9 (1996).
- [Vel94] M. Veltman, Digrammatica: The Path to Feynman Diagrams (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [Wei79] S. Weinberg, Physica A **96**, 327 (1979).
- [WGS06] N. Wies, J. Gegelia, S. Scherer, Phys. Rev. **D73**, 094012 (2006).