

Mathematischer Brückenkurs

Univ.-Prof. Dr. Sonia Bacca
s.bacca@uni-mainz.de

Mathematischer Brückenkurs

- Mathematik ist die Grundlage aller Naturwissenschaften.
- Dieser Brückenkurs richtet sich an Studienanfänger in naturwissenschaftlichen Fächern.
- Zeitumfang: 3 Wochen vor Semesterbeginn.

Ziel des Brückenkurs

- Sie haben Themen aus der Schulmathematik vergessen:
Auffrischen der Kenntnisse.
- Sie kommen von unterschiedlichen Schulen, aus verschiedenen (Bundes-) Ländern und haben in der Schule unterschiedliche optionale Themen behandelt:
Angleichen des Kenntnisstandes.
- Sie sind neu an der Universität:
Knüpfen neuer sozialer Kontakte (Networking).

Uni ist nicht gleich Schule

- Mit der Uni beginnt ein neuer Lebensabschnitt.
- Sie sind erwachsen und werden als erwachsene Menschen behandelt.
- Im Allgemeinen keine Anwesenheitspflicht.
- Sie sind selbst verantwortlich, wie Sie lernen.
- Stoffmenge und Tempo einer Vorlesung liegt deutlich über einer Schulstunde.

Struktur des Brückenkurs

- **Vorlesung:** In den Vorlesungen wird neuer Stoff eingeführt und erklärt.
Mitschreiben kann hilfreich sein. Mitdenken ist essentiell.
- **Übungen:** In den Übungen werden Sie anhand von Übungsaufgaben Ihre Beherrschung des Stoffes überprüfen, einüben und vertiefen.

Ablauf des Brückenkurses

Stundenplan

09:15 – 10:30	Vorlesung (IMB Hörsaal)
10:30 – 11:00	<i>Pause</i>
11:00 – 12:00	Vorlesung (IMB Hörsaal)
12:00 – 12:30	Fragezeit (IMB Hörsaal)
12:30 – 14:15	<i>Mittagspause</i>
14:15 – 15:00	Übungsgruppen
15:00 – 15:30	<i>Pause</i>
15:30 – 17:00	Übungsgruppen

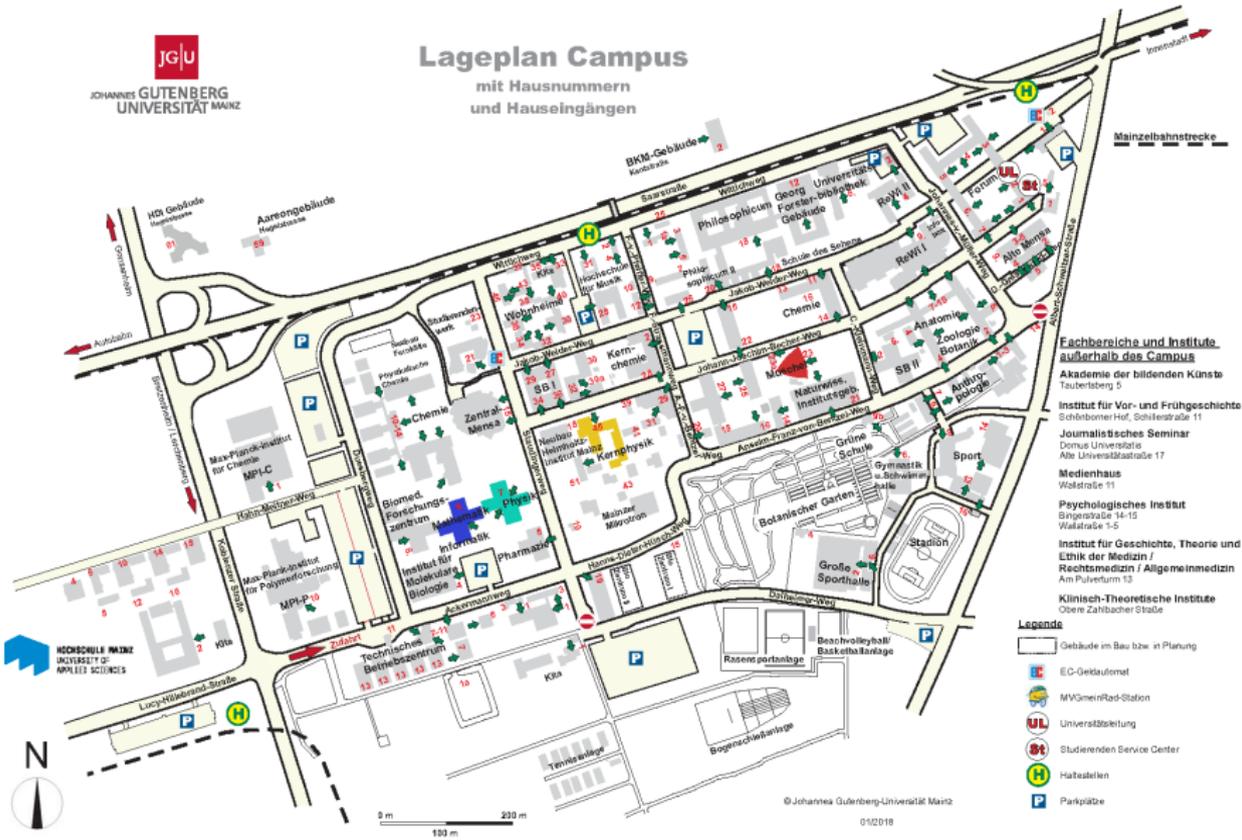
- Die Übungsaufgaben sind im Web zum Download bereitstehen.
`https://wwwth.kph.uni-mainz.de/mathematischer-brueckenkurs-a-sommersemester-2024/`
- Es müssen nicht alle Übungsaufgaben bearbeitet werden
- Sie dürfen (und sollten) in Gruppen arbeiten.
- Wenn Sie nicht mehr weiterkommen, oder sich nicht sicher sind, ob Ihre Lösung auch richtig ist, fragen Sie den Assistenten.

Übungsgruppen

Bitte teilen Sie sich in Gruppen für die Übungen:

	Raum			Tutor
1	Seminarraum A	Staudingerweg 9	01-219	Gregor Neumann
2	Seminarraum C	Staudingerweg 9	01-225	Immo Reis
3	Seminarraum D	Staudingerweg 9	01-231	Konrad Kleineidam
4	Minkowskiraum	Staudingerweg 9	01-234	Tim Egert
5	Online	Frühstudierenden		Pia Breinbeuer

Lageplan Campus mit Hausnummern und Hauseingängen



- Fachbereiche und Institute
außerhalb des Campus**
- Akademie der bildenden Künste
Taubertberg 5
 - Institut für Vor- und Frühgeschichte
Schönbömer Hof, Schillerstraße 11
 - Journalistisches Seminar
Domus Universität
Alte Universitätsstraße 17
 - Medienhaus
Waldrähe 11
 - Psychologisches Institut
Bingerstraße 14-15
Waldrähe 1-5
 - Institut für Geschichte, Theorie und
Klinik der Medizin /
Rechtsmedizin / Allgemeinmedizin
Am Pufferhaus 13
 - Klinisch-Theoretische Institute
Obere Zahlbacher Straße

- Legende**
- Gebäude im Bau bzw. in Planung
 - EC-Gebäudeportal
 - MVGemienrad-Station
 - Universitätsleitung
 - Studiendenden Service Center
 - Haltestellen
 - Parkplätze



Literatur und Ressourcen

- 1 Diese Folien finden Sie auch online: <https://wwwth.kph.uni-mainz.de/mathematischer-brueckenkurs-a-sommersemester-2024/>
- 2 Online-Kurs:
<https://www.ombplus.de/ombplus/public/index.html>
- 3 J. Erven, M. Erven, J. Hörwick, *Vorkurs Mathematik*, Oldenbourg (München, 2010)
- 4 H. J. Korsch, *Mathematik-Vorkurs*, Binomi Verlag (Barsinghausen, 2008)
- 5 G. Walz, F. Zeilfelder, G. Rießinger, *Brückenkurs Mathematik*, Springer Spektrum (Berlin und Heidelberg, 2014)

Übersicht - Erste Woche

- 1 **Notation und Mengen**
- 2 **Zahlen**
- 3 **Komplexe Zahlen**
- 4 **Vektoren**

Übersicht - Zweite Woche

- 5 **Lineare Gleichungssysteme**
- 6 **Matrizen**
- 7 **Folgen und Reihen**
- 8 **Funktionen**

Übersicht - Dritte Woche

- 9 Differentialrechnung mit einer Variablen
- 10 Taylor-Entwicklung + Regeln von l'Hopital
- 11 Integralrechnung
- 12 Funktionen mehrerer Variablen
- 13 Fehlerrechnung

QUIZ

In den Vorlesungen werden mehrere Quizfragen gestellt. Ich habe versucht, ein Live-Abstimmungssystem mit ILIAS einzurichten. Bitte besuchen Sie den Link oder benutzen Sie den QR-Code, um darauf zuzugreifen.

`ilias.uni-mainz.de/vote/F5UH`



QUIZ

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = ?$$

- (A) $\frac{5}{8}$
- (B) $\frac{5}{15}$
- (C) $\frac{19}{15}$
- (D) $\frac{2}{5}$

QUIZ

Bestimmen Sie x :

$$\frac{2x - 3}{x + 3} = 5$$

- (A) $x = \frac{3}{2}$
- (B) $x = -3$
- (C) $x = \frac{5}{2}$
- (D) $x = -6$

QUIZ

$$\log_2(32^4) = ?$$

- (A) 9
- (B) 20
- (C) 32
- (D) $\frac{5}{4}$

QUIZ

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 1$$

Die Ableitung $f'(1)$ ist

- (A) 0
- (B) 6
- (C) 5
- (D) 7

QUIZ

$$\int_0^1 (3x^2 - 6x + 1) dx = ?$$

- (A) -42
- (B) -2
- (C) -1
- (D) 7

Teil I

Schreibweise und Notation

Schreibweise und Notation

- Logisch “und” \wedge :

$$0 \wedge 0 = 0$$

$$0 \wedge 1 = 0$$

$$1 \wedge 0 = 0$$

$$1 \wedge 1 = 1$$

- Logisch “oder” \vee :

$$0 \vee 0 = 0$$

$$0 \vee 1 = 1$$

$$1 \vee 0 = 1$$

$$1 \vee 1 = 1$$

- Negation \neg :

$$\neg 0 = 1$$

$$\neg 1 = 0$$

Schreibweise und Notation

- Logisch “und” \wedge :

$$F \wedge F = F$$

$$F \wedge W = F$$

$$W \wedge F = F$$

$$W \wedge W = W$$

- Logisch “oder” \vee :

$$F \vee F = F$$

$$F \vee W = W$$

$$W \vee F = W$$

$$W \vee W = W$$

- Negation \neg :

$$\neg F = W$$

$$\neg W = F$$

Schreibweise und Notation

- Implikation (“wenn ..., dann ...”, \Rightarrow): $p \Rightarrow q$ ist wahr, es sei denn p ist wahr und q ist falsch.

p	q	$p \Rightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

- Äquivalenz (“genau dann wenn”, \Leftrightarrow): $p \Leftrightarrow q$ ist wahr genau dann wenn p und q beide denselben Wahrheitswert haben.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Schreibweise und Notation

- \exists : Es existiert
- \forall : Für alle
- \in : Element aus (einer Menge)
- ∞ : Symbol für Unendlich.
- \mathbb{N} : Die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$
- \mathbb{Z} : Die ganzen Zahlen $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- \mathbb{Q} : Die rationalen Zahlen, z.B. $\frac{2}{3}$
- \mathbb{R} : Die reellen Zahlen, z.B. $\sqrt{2}$
- \mathbb{C} : Die komplexen Zahlen, z.B. $\sqrt{-2}$

Schreibweise und Notation

- Σ : Summenzeichen

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

- Π : Produktzeichen

$$\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

- $n!$: Fakultät.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \quad 0! = 1.$$

- $\binom{n}{k}$: Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Schreibweise und Notation

- $\lim_{x \rightarrow a}$: Grenzwert für den Fall, daß sich x dem Wert a annähert.
- Ableitung: Sei $f(x)$ eine Funktion von x .

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}.$$

- Integral:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x_j,$$

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad \xi_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Schreibweise und Notation – Symbole

Neben lateinischen Buchstaben verwendet man auch oft griechische Buchstaben

A α Alpha

I ι Iota

P ρ Rho

B β Beta

K κ Kappa

Σ σ Sigma

Γ γ Gamma

Λ λ Lambda

T τ Tau

Δ δ Delta

M μ My

Υ υ Ypsilon

E ϵ Epsilon

N ν Ny

Φ ϕ Phi

Z ζ Zeta

Ξ ξ Xi

X χ Chi

H η Eta

O o Omikron

Ψ ψ Psi

Θ θ Theta

Π π Pi

Ω ω Omega

Mengen

Definition:

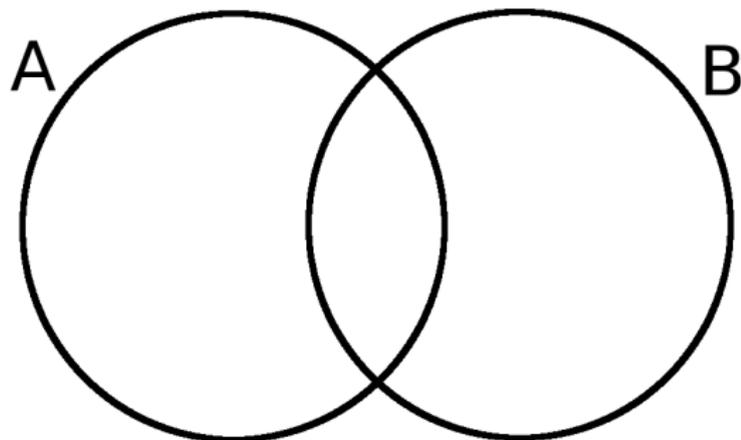
Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten unterscheidbaren Gegenständen unseres Denkens zu einem Ganzen, das heißt, zu einem neuen Gegenstand.

[nach Cantor]

- $\{a, b, c\}$: Menge der Elemente a , b , und c . Die Ordnung spielt keine Rolle: $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$
- $a \in A$: a ist ein Element der Menge A .
- Für $\neg(a \in A)$ schreiben wir kurz $a \notin A$.
- $A \subset B$: Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge B , wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind.

Mengen

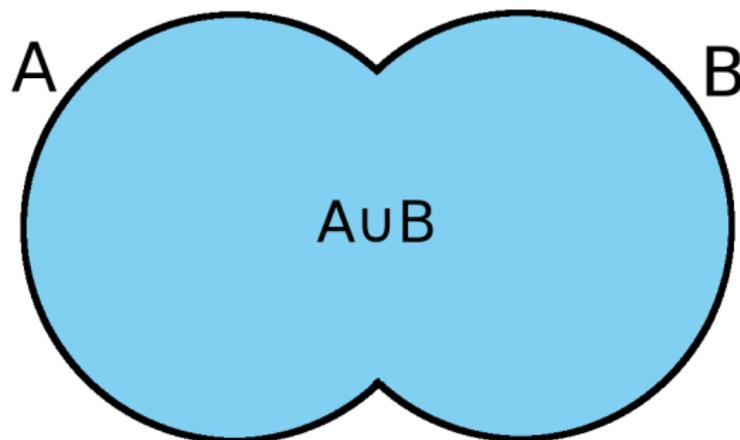
- Mengenoperationen erlauben, aus bekannten Mengen neue Mengen zu bilden.



Quelle: G. von Hippel

Mengen: $A \cup B$

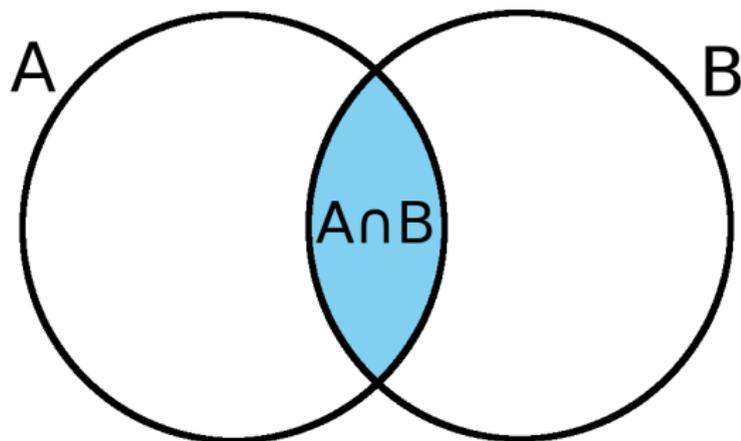
- Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ von A und B enthält alle Elemente von A und alle Elemente von B : $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$.



Quelle: G. von Hippel

Mengen: $A \cap B$

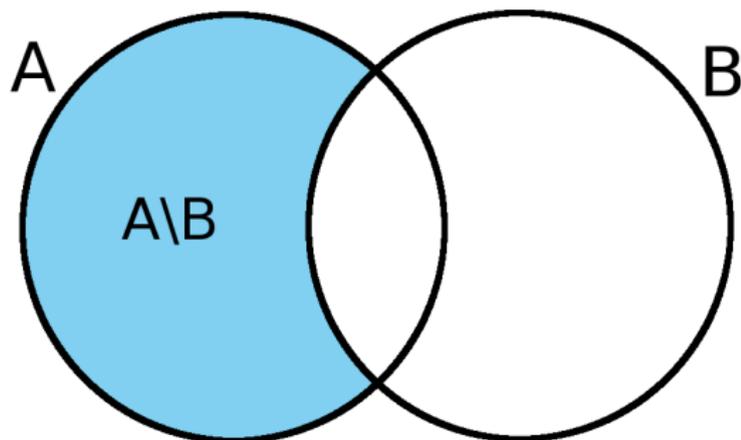
- Die Schnittmenge $A \cap B$ von A und B enthält alle Elemente von A , die auch Elemente von B sind: $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.



Quelle: G. von Hippel

Mengen: $A \setminus B$

- Die Differenzmenge $A \setminus B$ von A und B enthält alle Elemente von A , die nicht Elemente von B sind: $x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$



Quelle: G. von Hippel

Mengen

- Nützlicherweise definiert man die leere Menge $\emptyset = \{\}$.
- Eine weitere wichtige Definition ist das kartesische Produkt: Für Mengen A_1, A_2 ist

$$A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2\}$$

die Menge der (geordneten) Paare, deren i -te Komponente aus A_i stammt.

Gruppen

Definition:

Eine Menge G , versehen mit einer binären Operation $*$, heisst Gruppe wenn

- $*$ assoziativ ist
- $*$ ein neutrales Element e besitzt mit

$$a * e = e * a = a$$

- zu jedem element $a \in G$, ein inverses Element a^{-1} existiert mit

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Wenn die Operation $*$ kommutativ ist, spricht man von einer **Abel'schen Gruppe**.

Teil II

Zahlen

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N}

- \mathbb{N} : Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Die **Axiome von Peano** für die natürlichen Zahlen:

- ▶ (P1) Die Zahl 0 ist eine natürliche Zahl.
- ▶ (P2) Falls n eine natürliche Zahl ist, so ist die nachfolgende Zahl $n + 1$ ebenfalls eine natürliche Zahl.
- ▶ (P3) Die natürlichen Zahlen sind die minimale Menge, welche die ersten beiden Axiome erfüllt.

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N}

Auf \mathbb{N} sind **Addition** und **Multiplikation** definiert.

Sei $a, b \in \mathbb{N}$

- **Addition**: $a + b \in \mathbb{N}$

Aber: $a - b$ ist im Allgemeinen keine natürliche Zahl.

Beispiel: $a = 1$ und $b = 3$; $a - b = 1 - 3 = -2 \notin \mathbb{N}$

- Die Addition:

- Ist **assoziativ**: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Ist **kommutativ**: $a + b = b + a$
- Hat 0 als **neutrales Element**: $a + 0 = a$

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N}

Sei $a, b \in \mathbb{N}$:

- **Multiplikation:** $a \cdot b \in \mathbb{N}$ Aber: a/b ist im Allgemeinen keine natürliche Zahl.

Beispiel: $a = 1$ und $b = 3$; $a/b \notin \mathbb{N}$.

- Die Multiplikation:

- Ist **assoziativ:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

- Ist **kommutativ:** $a \cdot b = b \cdot a$

- Hat 1 als **neutrales Element:** $a \cdot 1 = a$

- Addition und Multiplikation sind **distributiv:**

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Beispiel:

$$(3 + 5) \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7$$

Der Induktionsbeweis

Man ist oft in der Situation eine Aussage der Form

$$f(n) = g(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen zu müssen. Hier bietet sich der Induktionsbeweis an.

Der Induktionsbeweis verläuft in zwei Teilen:

- 1 **Induktionsanfang:** Im ersten Teil zeigt man zunächst, dass die Behauptung für $n = 1$ richtig ist.
- 2 **Induktionsschritt:** Im zweiten Teil nimmt man an, dass die Behauptung für $(n - 1)$ richtig ist und zeigt, dass sie dann auch für n richtig ist.

Der Induktionsbeweis

Man sieht leicht, dass dies die allgemeine Aussage beweist:

- Für $n = 1$ wird die Aussage im ersten Teil bewiesen.
- Für $n = 2$ können wir dann verwenden, dass die Aussage für $n = 1$ richtig ist.
Somit liegt die Voraussetzung für den zweiten Teil vor und es folgt aufgrund des zweiten Teils die Richtigkeit für $n = 2$.
- Diese Argumentation lässt sich nun fortsetzen:
Da die Aussage für $n = 2$ richtig ist, muss sie aufgrund des zweiten Teils auch für $n = 3$ richtig sein, usw..

Der Induktionsbeweis

Beispiel

Für jede natürliche Zahl n ist die folgende Behauptung zu zeigen:

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ haben wir

linke Seite : $\sum_{j=1}^1 j = 1.$

rechte Seite : $\frac{1(1+1)}{2} = 1.$

Der Induktionsbeweis

Beispiel

Für jede natürliche Zahl n ist die folgende Behauptung zu zeigen:

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt: Wir dürfen nun annehmen, dass die Behauptung für $n - 1$ richtig ist, und müssen zeigen, dass sie dann auch für n gilt. In unserem Fall:

$$\sum_{j=1}^n j = \left(\sum_{j=1}^{n-1} j \right) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Die ganzen Zahlen \mathbb{Z}

Wenn $a, b \in \mathbb{N}$, $a - b$ hat nur dann eine Lösung $\in \mathbb{N}$, wenn $b \leq a$.
Um auch für $b > a$ eine Lösung angeben zu können, erweitern wir den Zahlenbereich auf die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- Die Addition, Multiplikation und Ordnung von \mathbb{N} setzen sich auf natürliche Weise auf \mathbb{Z} fort.
- Die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze gelten auch auf \mathbb{Z} .
- $\forall z \in \mathbb{Z}$ es gibt ein additives Inverses $(-z) \in \mathbb{Z}$ mit $z + (-z) = 0$.
- Die ganzen Zahlen bilden bezüglich der Addition eine Gruppe.

Die rationalen Zahlen \mathbb{Q}

Wenn $a, b \in \mathbb{Z}$, a/b hat nur dann eine Lösung $\in \mathbb{Z}$ nur wenn b ein Teiler von a ist.

Um für alle $b \neq 0$, eine Lösung angeben zu können, erweitern wir den Zahlbereich auf die rationalen Zahlen \mathbb{Q}

$$\mathbb{Q} = \left\{ r \mid r = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

- Für $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ gilt $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$.
- Die Addition, Multiplikation und Ordnung von \mathbb{Z} setzen sich auf natürliche Weise auf \mathbb{Q} fort.
- Die Assoziativ, Kommutativ und Distributivgesetze gelten auch in \mathbb{Q} .

Bruchrechnen

- Erweitern/Kürzen:

$$\frac{c \cdot p_1}{c \cdot q_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

- Multiplikation:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

- Division:

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Bruchrechnen

- Addition:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

- Subtraktion:

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

Beispiele

- Erweitern/Kürzen:

$$\frac{15}{9} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{5}{3}$$

- Addition:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{9 + 10}{15} = \frac{19}{15}$$

- Division:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$

Potenzen

Für Potenzen schreiben wir

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}$$

Rechnen mit Potenzen:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n & \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \\ a^n \cdot a^m &= a^{n+m} & \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

Beispiele

- Gleicher Exponent:

$$2^7 \cdot 3^7 = (2 \cdot 3)^7 = 6^7$$

- Gleiche Basis:

$$2^5 \cdot 2^7 = 2^{(5+7)} = 2^{12}$$

- Potenz einer Potenz:

$$(3^2)^5 = 3^{(2 \cdot 5)} = 3^{10}$$

Quiz

$$\frac{x^{-1}x^3x^5}{x^2x^7} = ?$$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) x^2
- (D) $\frac{1}{x^2}$

Die binomischen Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Die reellen Zahlen \mathbb{R}

- Manche Zahlen lassen sich nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen. Es sind **Irrationale Zahlen** (unbegrenzte nichtperiodische Dezimalzahlen), die nicht als Brüche dargestellt werden können.

Beispiel: $x^2 = 2$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$.

$x = \pm\sqrt{2}$ ist eine Irrationale Zahl.

- Durch Erweiterung des \mathbb{Q} Zahlbereichs auf alle unendlichen nichtperiodische Dezimalzahlen der irrationale Zahlen \mathbb{I} erhalten wir die reellen Zahlen \mathbb{R} .

Beispiel: Transzendente Zahlen wie $\pi = 3,141592\dots$ und $e = 2,718281\dots \in \mathbb{R}$.

- Addition und Multiplikation mitsamt ihren Inversen setzen sich von \mathbb{Q} auf \mathbb{R} fort.

Die reellen Zahlen \mathbb{R}

Die reellen Zahlen sind **angeordnet**:

Es sind gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet ($x > 0$), so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (O1) Es gilt genau eine der Beziehungen $x < 0$, $x = 0$ oder $x > 0$.
- (O2) Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x + y > 0$.
- (O3) Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x \cdot y > 0$.

Die reellen Zahlen \mathbb{R}

Weitere Operationen, die auf reellen Zahlen immer möglich sind und als Ergebniss eine reelle Zahl ergeben, sind:

- **Potenzieren** mit ganzem Exponenten
- **Wurzelziehen** aus jeder positiven Zahl
- **Logarithmus** mit beliebiger positiver Basis (ausser die Null)

Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis b ist definiert durch

$$x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a$$

Es gelten die Logarithmengesetze:

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$$

$$\log_b(a/c) = \log_b a - \log_b c$$

$$\log_b(a^c) = c \log_b a$$

$$\log_b c = \frac{1}{\log_c b}$$

Wichtige Logarithmen $\log_e x = \ln x$, $\log_{10} x$.

Lineare Gleichungen

Es seien $a \neq 0$ und b gegebene reelle Zahlen und x eine Unbekannte.
Man nennt

$$ax + b = 0$$

eine **lineare Gleichung** für x .

Die Gleichung hat die Lösung

$$x = -\frac{b}{a}$$

Quadratische Gleichungen

Es seien $a \neq 0$, b und c gegebene reelle Zahlen und x eine Unbekannte. Man nennt

$$ax^2 + bx + c = 0$$

eine **quadratische Gleichung** für x .

Falls $D = b^2 - 4ac \geq 0$ (D heisst Diskriminante), so hat die Gleichung die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{1}{2a} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right)$$

Teil III

Komplexe Zahlen

Motivation

Die reellen Zahlen enthalten zum Beispiel die Lösungen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ der Gleichung

$$x^2 = 2.$$

Aber zum Beispiel die Gleichung

$$x^2 = -2$$

hat keine reellen Lösungen.

Definition der komplexen Zahlen

Definition

Man definiert die **imaginäre Einheit** i als eine Lösung der Gleichung

$$i^2 = -1.$$

Die komplexen Zahlen \mathbb{C} sind die Menge

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Real- und Imaginärteil

Definition

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl.

Man bezeichnet x als **Realteil** und y als **Imaginärteil**.

$$\operatorname{Re} z = x,$$

$$\operatorname{Im} z = y.$$

Beispiel:

$$\operatorname{Re} (3 + 5i) = 3,$$

$$\operatorname{Im} (3 + 5i) = 5.$$

Konjugation

Definition

Die zu $z = x + iy$ **konjugiert komplexe Zahl** ist

$$z^* = x - iy.$$

Beispiel:

$$(3 + 5i)^* = 3 - 5i$$

Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$.

Definition der Addition und der Multiplikation:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Beispiel:

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = 4 + 6i$$

$$(1 + 2i) \cdot (3 + 4i) = -5 + 10i$$

Quiz

Sei $z_1 = 7 + 13i$ und $z_2 = 2 - 5i$.

$$z_1 + z_2 = ?$$

- (A) $17i$
- (B) $9 + 8i$
- (C) $9 + 18i$
- (D) $5 - 18i$

Quiz

Sei $z_1 = 5 + 9i$ und $z_2 = 2i$.

$$z_1 \cdot z_2 = ?$$

- (A) $10 + 18i$
- (B) $10 - 18i$
- (C) $-18 + 10i$
- (D) $18 + 10i$

Subtraktion und Division von komplexen Zahlen

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$.

Definition der Subtraktion und Division:

$$\begin{aligned}z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_1y_2 + y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.\end{aligned}$$

Subtraktion und Division von komplexen Zahlen

Beispiel:

$$\begin{aligned}(1 + 2i) - (3 + 4i) &= (1 - 3) + i(2 - 4) \\ &= -2 - 2i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1 + 2i}{3 + 4i} &= \frac{(1 + 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\ &= \frac{(3 + 8) + i(6 - 4)}{9 + 16} \\ &= \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i.\end{aligned}$$

Quiz

Sei $z_1 = 6 + 8i$ und $z_2 = 2i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = ?$$

- (A) 10
- (B) $3 + 4i$
- (C) $4 - 3i$
- (D) $4 + 3i$

Polynome

Definition

Ein Polynom vom Grad n ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{i=0}^n c_i x^i,$$

wobei $x^0 = 1$.

- Die Summe und das Produkt zweier Polynome sind wiederum Polynome.
- Eine algebraische Gleichung mit Grad n ist eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^n c_i x^i = 0.$$

- Die Variable x kann reell aber auch komplex sein (z).

Nullstellen eines Polynoms

Theorem

Es seien $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Gleichung

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 = 0.$$

Diese Gleichung hat für die unbekannte Variable z in \mathbb{C} genau n Lösungen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

Theorem

Anders ausgedrückt: Ein Polynom n -ten Grades hat in \mathbb{C} genau n Nullstellen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

Vielfachheiten

Beispiel:

Betrachte das Polynom

$$(z - 4)(z - 5)^2$$

Die Nullstelle $z = 4$ hat die Vielfachtheit 1, die Nullstelle 5 hat die Vielfachtheit 2.

Das Polynom hat den Grad 3, es sollte also drei Nullstellen haben. Eine einfache Nullstelle und eine doppelte Nullstelle ergibt

$$1 + 2 = 3.$$

Nullstellen eines Polynoms

Beispiel:

Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$2z^2 - 8z + 26 = 0$$

Die Diskriminante ist

$$D = b^2 - 4ac = -144$$

Somit

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{1}{4} \left(8 \pm \sqrt{-144} \right) = \frac{1}{4} \left(8 \pm \sqrt{(-1) \cdot (12)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (8 \pm 12i) = 2 \pm 3i \end{aligned}$$

Rechenregeln mit Konjugation

$$(z^*)^* = z,$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2j}(z - z^*).$$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*,$$

$$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*,$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*,$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}.$$

Betrag einer reellen Zahl

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Der Betrag ist durch

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

definiert.

Betrag einer komplexen Zahl

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Es ist

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2.$$

Definition

Als **Betrag** der komplexen Zahl bezeichnet man

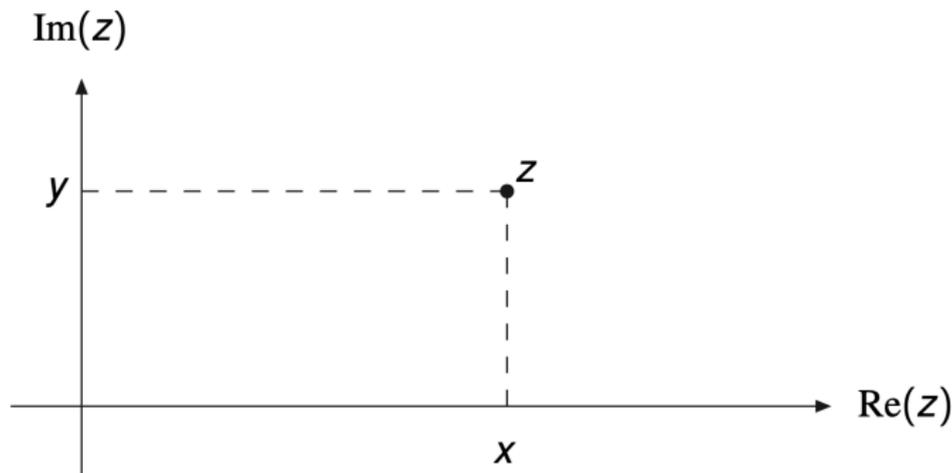
$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Beispiel:

$$|3 + 5i| = \sqrt{(3 + 5i)(3 - 5i)} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

Die komplexe Zahlenebene

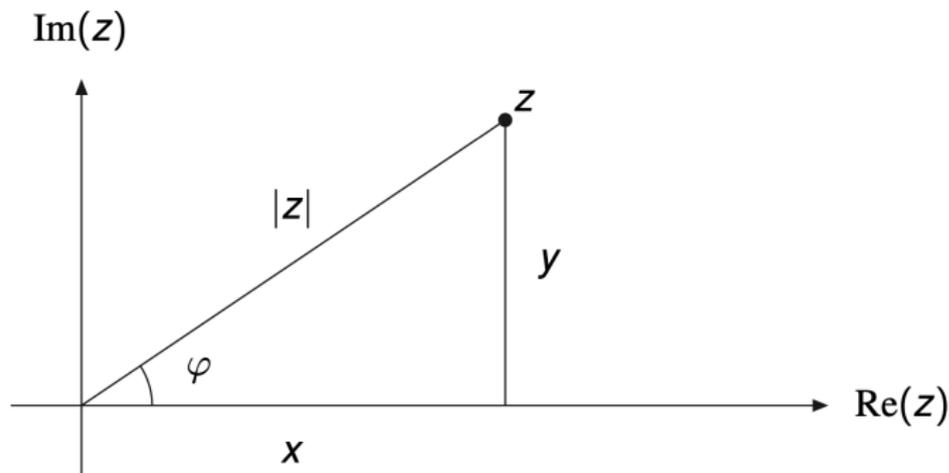
Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ wird durch ein Paar (x, y) zweier reeller Zahlen beschrieben.



Quelle: S. Weinzierl

Die reellen Zahlen sind genau die Zahlen, für die $\text{Im}(z) = 0$ gilt.

Die komplexe Zahlenebene



Quelle: S. Weinzierl

Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

φ nennt man das *Argument* oder die *Phase* der komplexen Zahl.

Umrechnung:

Normalform in Polarform

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \quad \text{für } x = 0, y > 0, \\ \varphi &= \frac{3\pi}{2} \quad \text{für } x = 0, y < 0.\end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichung $\tan \varphi = y/x$ nach φ ergibt $\arctan \frac{y}{x}$.

Polarform in Normalform

$$x = |z| \cos \varphi, \quad y = |z| \sin \varphi.$$

Multiplikation und Division in Polarform

In der Normalform hatten wir:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.\end{aligned}$$

In der Polarform sind Multiplikation und Division besonders einfach:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].\end{aligned}$$

Die Formel von Moivre

Aus

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

folgt insbesondere

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Diese Gleichung wird auch als Formel von Moivre bezeichnet.

Die Formel von Euler

Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Komplexwertige Funktionen existieren auch. Im Vorgriff erwähnen wir schon die Formel von Euler

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad [\text{Exponentialdarstellung}]$$

Diese Formel werden wir später mit Hilfe der Reihendarstellung der Funktionen \exp , \sin und \cos relativ einfach beweisen können. Somit

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Multiplikation und Division mit der Formel von Euler

Es sei $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$. Dann ist

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.\end{aligned}$$

Quiz

$$i^9 = ?$$

- (A) $-i$
- (B) i
- (C) $9i$
- (D) $9 + i$

Antwort

$$\begin{aligned}i^9 &= i \cdot i \\&= i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i \\&= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i \\&= (-1)^4 \cdot i \\&= i\end{aligned}$$

Betrag und Argument von i

Wir schreiben i in Polarform: Es ist

$$|i| = \sqrt{i \cdot i^*} = \sqrt{i \cdot (-i)} = \sqrt{1} = 1.$$

Da $i = 0 + 1 \cdot i$ und somit $x = 0$ und $y = 1$ gilt

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Somit

$$i = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1.$$

Potenzen von i

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Mit Formel von Moivre haben wir

$$i^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Insbesondere:

$i^{-4} = 1,$	$i^{-3} = i,$	$i^{-2} = -1,$	$i^{-1} = -i,$
$i^0 = 1,$	$i^1 = i,$	$i^2 = -1,$	$i^3 = -i,$
$i^4 = 1,$	$i^5 = i,$	$i^6 = -1,$	$i^7 = -i,$
$i^8 = 1,$	$i^9 = i,$	$i^{10} = -1,$	$i^{11} = -i,$

Quiz

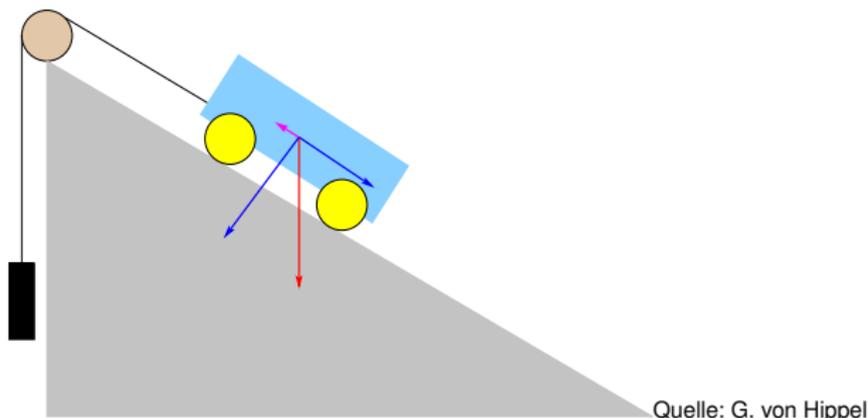
$$\sqrt{i} = ?$$

- (A) -1
- (B) i
- (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$
- (D) $-1 + i$

Teil IV

Vektoren

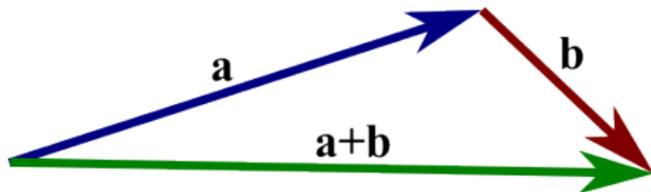
Motivation



- Viele physikalische Größen (Geschwindigkeit, Kraft, ...) haben neben einem Betrag auch eine räumliche Richtung \leadsto Vektoren (*lat.* "Fahrer")
- Räumlich gerichtete Größen können als Pfeile dargestellt werden, deren Länge dem Betrag der Größe entspricht.

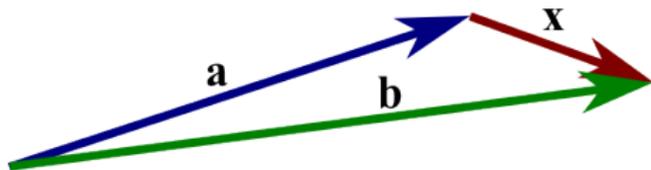
Motivation

Aus der Schulmathematik kennen sie die Vektoren als Pfeile.
Man kann zwei Vektoren summieren $\mathbf{a} + \mathbf{b}$



Quelle: mathinsight.org

oder zwei Vektoren subtrahieren $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$



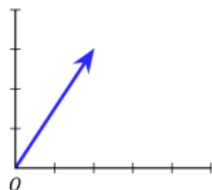
Quelle: mathinsight.org

Motivation

Aus der Schulmathematik sind die Vektoren in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 bekannt. Vektoren aus dem \mathbb{R}^2 können durch **zwei reelle Zahlen x und y** beschrieben werden

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

Beispiel $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Quelle: G. von Hippel

Durch Einführen von kartesischen Koordinaten identifizieren wir den Raum der zwei-dimensionalen Pfeile mit \mathbb{R}^2 .

Motivation

Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 können durch **drei reelle Zahlen x , y und z** beschrieben werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Wir können das Konzept erweitern.

Wir lassen **andere Dimensionen** zu und beschränken uns nicht mehr auf Vektorräume der Dimension 2 und 3.

Beispiel: \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vektorräume

Sei V eine Menge und sei $(V, +)$ eine kommutative Gruppe, wobei $+: V \times V \rightarrow V$ die Operation Summe ist. Dann nehmen wir auch eine andere Operation \cdot , die wir skalare Multiplikation nennen: $K \times V \rightarrow V$, $(k, \mathbf{v}) \rightarrow k \cdot \mathbf{v}$, wobei zum Beispiel $K = \mathbb{R}$.
 $(V, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum, wenn die folgenden Axiome gelten:

- *Es gelten die Distributivgesetze:*

$$k \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (k \cdot \mathbf{v}_1) + (k \cdot \mathbf{v}_2)$$

$$(k_1 + k_2) \cdot \mathbf{v} = (k_1 \cdot \mathbf{v}) + (k_2 \cdot \mathbf{v})$$

- *Es gilt das Assoziativgesetz:*

$$k_1 \cdot (k_2 \cdot \mathbf{v}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \mathbf{v}$$

- *Für die Eins gilt: $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$*

Transposition

Man schreibt die Elemente aus dem Vektorraum als Spaltenvektoren, so zum Beispiel:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Man bezeichnet mit \mathbf{v}^T den zu \mathbf{v} transponierten Vektor (d.h. aus einem Spaltenvektor wird ein Zeilenvektor, und aus einem Zeilenvektor wird ein Spaltenvektor):

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Addition und skalare Multiplikation

Bei der Summe zweier Vektoren werden die Vektoren komponentenweise addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Bei der skalaren Multiplikation wird jede Komponente mit dem Skalar multipliziert:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Quiz

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$

Einheitsvektoren

Definition

Vektoren, die in fast allen Komponenten eine Null haben, bis auf eine Komponente, in der sie eine Eins haben, spielen eine wichtige Rolle. Hat so ein Vektor in der i -ten Komponente eine Eins,

$$\mathbf{e}_i = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0 \right)^T,$$

so bezeichnet man diesen Vektor als den **i -ten Einheitsvektor**.

Lineare Unabhängigkeit

Definition

Seien n Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ gegeben. Folgt aus

$$\begin{aligned} a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n &= 0, \end{aligned}$$

so nennt man die Vektoren **linear unabhängig**. Anderfalls nennt man sie linear abhängig.

Basis und Dimension

Definition

Sei V ein Vektorraum. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in V nennt man die **Dimension des Vektorraumes**.

Eine Menge linearer unabhängiger Vektoren, die maximal ist, nennt man eine **Basis** von V .

Beispiel:

\mathbb{R}^n hat die Dimension n . Eine Basis von \mathbb{R}^n

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}.$$

Man nennt diese Basis die Standardbasis.

Standardbasis

Beispiel:

Standardbasis des \mathbb{R}^3

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$$

Standardbasis des \mathbb{R}^4

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Euklidisches Skalarprodukt

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Die Komponentendarstellung der beiden Vektoren bezüglich der Standardbasis sei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Wir definieren das **euklidische Skalarprodukt** zwischen zwei Vektoren als die Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Euklidisches Skalarprodukt

Eigenschaften:

- *Linear in der ersten Komponente:*

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}, \quad (\lambda \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

- *Linear in der zweiten Komponente:*

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}, \quad \mathbf{x} \cdot (\lambda \cdot \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

- *Symmetrisch:*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

- *Positiv definit:*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0, \quad \text{falls } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Euklidisches Skalarprodukt

Ein reeller Vektorraum mit einem euklidischen Skalarprodukt bezeichnet man als einen euklidischen Vektorraum.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = ?$$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 32
- (D) 42

Betrag eines Vektors

Definition

Man bezeichnet mit

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

die Länge oder den **Betrag von \mathbf{x}** .

Sei $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist gegeben durch

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \varphi,$$

also

$$\varphi = \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}.$$

Zwei Vektoren stehen **senkrecht** aufeinander ($\varphi = 90^\circ$), falls

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt)

Sei V der Vektorraum \mathbb{R}^3 . In einem **dreidimensionalen Vektorraum** ist zusätzlich das Kreuzprodukt als eine Abbildung

$$V \times V \rightarrow V,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

definiert.

Das Kreuzprodukt gibt es nur in drei Dimensionen!

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Kreuzproduktes

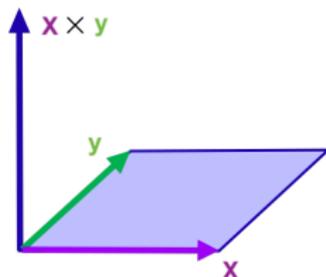
Das Kreuzprodukt ist anti-symmetrisch:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}.$$

Der Vektor $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ steht senkrecht auf \mathbf{x} und \mathbf{y} :

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0,$$

$$\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0,$$



Quelle: G. von Hippel

Für den Betrag von $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ gilt:

$$|\mathbf{x} \times \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \sin \varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} ist.

Antisymmetrischer Tensor

Sei $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$. Für die Komponenten von \mathbf{z} gilt:

$$z_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_j y_k$$

Hier wurde der **antisymmetrische Tensor** (oder **Levi-Civita-Tensor**) ε_{ijk} verwendet.

Definition (antisymmetrischer Tensor)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Permutationen

Definition

Eine Permutation $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ nennt man gerade, wenn man sie durch eine gerade Anzahl von paarweisen Vertauschungen aus $(1, 2, \dots, n)$ erzeugen kann. Benötigt man eine ungerade Anzahl von Vertauschungen, so nennt man die Permutation ungerade.

Beispiel:

- $(3, 2, 1, 5, 4)$ ist eine gerade Permutation
(vertausche $1 \leftrightarrow 3$ und $4 \leftrightarrow 5$),
- $(1, 5, 3, 4, 2)$ ist eine ungerade Permutation
(vertausche $2 \leftrightarrow 5$).

Quiz

$$\varepsilon_{132} = ?$$

- (A) -1
- (B) 0
- (C) 1
- (D) 6

Kronecker-Delta-Symbol

Definition (Kronecker-Delta-Symbol)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Teil V

Lineare Gleichungssysteme

Motivation

- Lineare Gleichungssysteme treten in den Naturwissenschaften relativ oft auf.
- Viele Problemstellungen lassen sich auf lineare Gleichungssysteme zurückführen.
- Lineare Gleichungssysteme sind systematisch lösbar.
- Der **Gauß'sche Eliminationsalgorithmus** ist eine systematische Lösungsmethode.

Lineare Gleichungssysteme

Definition

Unter einem linearen Gleichungssystem versteht man **n Gleichungen** mit **m Unbekannten** x_1, x_2, \dots, x_m der Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m = b_2,$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nm}x_m = b_n.$$

Die Koeffizienten a_{ij} und b_i sind gegebene reelle oder komplexe Zahlen.

Jede Variable kommt nur linear vor und jeder Summand auf der linken Seite enthält nur eine Variable.

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel:

$$3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 36,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 29,$$

$$x_2 + 4x_3 = 14.$$

Lineare Gleichungssysteme

Gegenbeispiel:

$$3x_1^5 + 3x_2 + 9x_3 = 36,$$

$$x_1 + x_1x_2 + 4x_3 = 14,$$

$$\sin(x_1) + 7x_3 = 29.$$

- $3x_1^5$ ist nicht linear: höhere Potenz in x_1 .
- x_1x_2 ist nicht linear: enthält mehr als eine Variable.
- $\sin(x_1)$ ist keine lineare Funktion von x_1 .

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Zeilenvertauschungen

Wir betrachten nun einen Algorithmus um ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten systematisch zu vereinfachen und zu lösen.

Wir beginnen mit einer trivialen Beobachtung:

Offensichtlich **können Zeilen vertauscht werden**, d.h. das Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m = b_2,$$

ist **äquivalent** zu dem Gleichungssystem

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m = b_2,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m = b_1.$$

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Multiplikation mit Konstanten

Desweiteren sei (x_1, x_2, \dots, x_m) ein m -Tupel, welches die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_mx_m = b,$$

erfüllt. Dann erfüllt es auch die Gleichung

$$(ca_1)x_1 + (ca_2)x_2 + (ca_3)x_3 + \dots + (ca_m)x_m = cb,$$

Umgekehrt gilt, dass für $c \neq 0$ jedes m -Tupel, welches die zweite Gleichung erfüllt, auch die erste Gleichung erfüllt.

Daraus folgt, dass man die linke und rechte Seite einer Gleichung mit einer konstanten Zahl c ungleich Null multiplizieren darf.

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Addition von Zeilen

Die dritte elementare Umformung ist die folgende: **Man darf eine Zeile durch die Summe dieser Zeile mit einer anderen Zeile ersetzen**, d.h. die Gleichungssysteme

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2,$$

und

$$(a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + \dots + (a_{1m} + a_{2m})x_m = b_1 + b_2,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2,$$

haben die gleichen Lösungen.

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Mit Hilfe dieser drei elementaren Umformungen

- 1 Zeilenvertauschungen
- 2 Multiplikation mit Konstanten
- 3 Addition von Zeilen

läßt sich ein Algorithmus zur systematischen Vereinfachung von linearen Gleichungssystemen angeben.

Notation

In der Praxis schreibt man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

wie folgt auf:

$$\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}$$

Dies ist ausreichend, da alle Umformungen nur auf die Koeffizienten a_{ij} und b_i wirken.

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Algorithmus

- 1 Setze $i = 1$ (Zeilenindex, geht bis n), $j = 1$ (Spaltenindex, geht bis m).
- 2 Falls $a_{ij} = 0$ suche $k > i$, so dass $a_{kj} \neq 0$ und **vertausche** Zeilen i und k .
- 3 Falls ein solches k aus Schritt 2 nicht gefunden werden kann, setze $j \rightarrow j + 1$.
- 4 Falls man in Schritt 3 den Wert $j = m + 1$ erreicht, beende den Algorithmus, andernfalls gehe zurück zu Schritt 2.
- 5 **Multipliziere** Zeile i mit $1/a_{ij}$.
- 6 Für alle Zeilen $k \neq i$ **addiere** zur Zeile k das $(-a_{kj})$ -fache der i -ten Zeile.
- 7 Setze $i \rightarrow i + 1$ und $j \rightarrow j + 1$.
- 8 Falls man in Schritt 7 den Wert $i = n + 1$ oder den Wert $j = m + 1$ erreicht, beende den Algorithmus, andernfalls gehe zurück zu Schritt 2.

Beispiel

Wir betrachten folgendes Beispiel:

$$3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 36,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 29,$$

$$x_2 + 4x_3 = 14.$$

Aufgeschrieben ergibt dies:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 36 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}$$

Umformungen

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 36 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}$$

Multipliziere mit $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}$$

Addiere das (-2) -fache der 1. Zeile

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}$$

Addiere das (-1) -fache der 2. Zeile

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \end{array}$$

Addiere das (-1) -fache der 2. Zeile

Umformungen

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}$$

Multipliziere mit $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Addiere das (-2) -fache der 3. Zeile

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Addiere das (-1) -fache der 3. Zeile

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Ergebnis

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus endete mit

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist somit äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = 2,$$

$$x_3 = 3.$$

Der Rang eines linearen Gleichungssystems

Durch **Umbenennung der Variablen** x_1, \dots, x_m (equivalent zur **Spaltenvertauschungen**) lässt sich durch den Gauß'schen Eliminationsalgorithmus die folgende Form erreichen:

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(r+1)} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(r+1)} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r(r+1)} & \dots & a_{rm} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \end{array}$$

Man bezeichnet r als den **Rang** (engl. "rank").

Lösungen eines linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem kann:

- **Keine Lösung** haben, falls eine der Zahlen b_{r+1}, \dots, b_n ungleich Null ist.
- **Eine eindeutige Lösung** haben, falls $r = m$ und $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$.
- **Mehrere Lösungen** haben, falls $r < m$ und $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$.

Zur Erinnerung:

wir haben n Gleichungen (Zeilen) und m Unbekannten (Spalten).

1. Fall: Keine Lösung

- Ist eine der Zahlen b_{r+1}, \dots, b_n ungleich Null, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.
- In diesem Fall ist notwendigerweise $r < n$.

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(r+1)} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(r+1)} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r(r+1)} & \dots & a_{rm} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \end{array}$$

2. Fall: Eindeutige Lösung

- Ist $r = m$ und $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$, so gibt es eine eindeutige Lösung.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$$

- Dies beinhaltet auch den Spezialfall $r = n = m$, für dem wir $\{b_{r+1}, \dots, b_n\} = \emptyset$ haben.

3. Fall: Mehrere Lösungen

- Ist $r < m$ und $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$, so gibt es mehrere Lösungen.

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(r+1)} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(r+1)} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r(r+1)} & \dots & a_{rm} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$$

- Dies beinhaltet auch den Spezialfall $r = n$ ($n < m$), für den wir $\{b_{r+1}, \dots, b_n\} = \emptyset$ haben.

Lösungen eines linearen Gleichungssystems

- Ist $r < n$ und $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$, so reduzieren sich die Zeilen $(r + 1)$ bis n

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$$

auf die triviale Gleichung

$$0 = 0.$$

Diese Zeilen enthalten keine zusätzliche Information und können auch weggelassen werden.

Quiz

Für ein lineares Gleichungssystem mit vier Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 liefert der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- (A) Das Gleichungssystem hat keine Lösung.
- (B) Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 0$.
- (C) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die auf einer Geraden im \mathbb{R}^4 liegen: $x_1 = 1 - t, x_2 = 2 - t, x_3 = 3, x_4 = t$.
- (D) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die auf einer Ebene im \mathbb{R}^4 liegen: $x_1 = 1 - t_2, x_2 = 2 - t_2, x_3 = 3 + t_1, x_4 = t_2$.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Zur Erinnerung: m Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ nennt man linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

nur die Lösung $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = (0, 0, \dots, 0)$ hat.

Andernfalls nennt man sie linear abhängig.

Ist der zugrundeliegende Vektorraum n -dimensional, so ergibt die obige Gleichung ausgeschrieben in Komponenten n lineare Gleichungen mit m Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Man kann nun mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsalgorithmuses feststellen, ob die Vektoren linear abhängig sind.

Beispiel

Sei

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Wir formen dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsalgorithmuses um:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \\ \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Addiere das (-1) -fache der 1. Zeile

Addiere das (-1) -fache der 1. Zeile

Addiere das (-2) -fache der 2. Zeile

Addiere das (-2) -fache der 2. Zeile

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Somit gibt es mehrere Lösungen:

$$\lambda_1 = -5t, \quad \lambda_2 = 3t, \quad \lambda_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die drei Vektoren sind linear abhängig.

Teil VI

Matrizen

Matrizen

Definition

Eine rechteckige Anordnung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

von Elementen a_{ij} nennt man Matrix.

Die Elemente a_{ij} nennt man die Komponenten der Matrix.

Eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten bezeichnet man als $(n \times m)$ -Matrix.

Matrizen

- Eine Matrix bezeichnet man als **quadratisch**, falls $n = m$.
- Eine Matrix bezeichnet man als **Einheitsmatrix**, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = \delta_{ij}$.
- Eine Matrix bezeichnet man als **Diagonalmatrix**, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.
- Eine Matrix bezeichnet man als **obere Dreiecksmatrix**, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

Matrizen

Quadratisch:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Addition von Matrizen

Seien A und B zwei $(n \times m)$ -Matrizen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 7 & 2 + 8 & 3 + 9 \\ 4 + 10 & 5 + 11 & 6 + 12 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalaren

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Vektorraum der $(n \times m)$ -Matrizen

- Mit dieser Addition und dieser skalaren Multiplikation bilden die $(n \times m)$ -Matrizen einen Vektorraum.
- Die Dimension dieses Vektorraumes ist $n \cdot m$.
- Eine Basis ist gegeben durch die Matrizen e_{ij} ,

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

die nur in dem Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte eine Eins haben, ansonsten nur Nullen.

Multiplikation

Das Ergebnis ist eine $(n \times m)$ -Matrix C

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix},$$

wobei

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Regel: Zeile \times Spalte

Multiplikation

Beispiel:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 + 18 + 33 & 8 + 20 + 36 \\ 28 + 45 + 66 & 32 + 50 + 72 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix}$

Quiz

$$(3 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

(B) $(3 \ 8)$

(C) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

(D) (11)

Spaltenvektoren und Zeilenvektoren als Matrizen

- Ein n -dimensionaler Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

kann als eine $(n \times 1)$ -Matrix aufgefasst werden.

- Ebenso kann ein n -dimensionaler Zeilenvektor

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

als eine $(1 \times n)$ -Matrix betrachtet werden.

Lineare Gleichungssysteme

Setzt man

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

so läßt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

auch wie folgt schreiben:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Quadratische Matrizen

Wir betrachten im folgenden die **quadratischen** $(n \times n)$ -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und führen die Begriffe **Spur** und **Determinante** ein.

Spur

Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definition

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Rechenregeln: Es seien A und B $(n \times n)$ -Matrizen, λ ein Skalar:

$$\operatorname{Tr} (A + B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B,$$

$$\operatorname{Tr} (\lambda \cdot A) = \lambda \operatorname{Tr} A.$$

Beispiel:

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = 1 + 6 + 11 + 16 = 34$$

Quiz

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

- (A) $\sqrt{3}$
- (B) 3
- (C) 6
- (D) 45

Determinante

Nehmen wir eine quadratische Matrix. Die kleinste Dimension, die wir haben können, ist (1×1) . Per Definition ist die Determinante einer (1×1) -Matrix

$$\det a_{11} = a_{11}.$$

Die zweitkleinste Dimension, die wir haben können, ist (2×2) . Per Definition ist die Determinante einer (2×2) -Matrix

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Der Begriff der Determinante kann für eine Matrix $(n \times n)$ eingeführt werden. Schauen wir uns die allgemeine Definition an.

Determinante

Definition

$$\det A = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

wobei $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ das total antisymmetrische Symbol in n Dimensionen ist

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, \dots, n), \\ -1 & \text{für } (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, \dots, n), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Determinante

Für die Determinante existiert auch die folgende Schreibweise

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinante einer Diagonalmatrix

Sei $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix.

Dann ist

$$\det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Eine (1×1) -Matrix ist immer eine Diagonalmatrix und somit

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Berechnung der Determinante

Zu einer $(n \times n)$ -Matrix A definieren wir zunächst eine $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrix A_{ij} , die dadurch entsteht, dass man die i -te Zeile und die j -te Spalte der Matrix A entfernt.

Entwicklung nach der i -ten Zeile:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Äquivalent kann auch nach der j -ten Spalte entwickelt werden:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Dies erlaubt die rekursive Berechnung einer Determinante.

Determinante

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} \\ = -3 \cdot (5 \cdot 11 - 7 \cdot 9) = 24$$

Rechenregeln für die Determinante:

Es seien A und B ($n \times n$)-Matrizen, λ ein Skalar:

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B),$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A.$$

Quiz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = ?$$

- (A) 0
- (B) 10
- (C) 24
- (D) -228

Quadratische Matrizen

Seien A und B zwei $(n \times n)$ -Matrizen. In diesem Fall ist das Matrixprodukt

$$A \cdot B$$

wieder eine $(n \times n)$ -Matrix.

Für $(n \times n)$ -Matrizen ist die Matrizenmultiplikation also abgeschlossen.

Das neutrale Element bezüglich der Matrizenmultiplikation ist offensichtlich die Einheitsmatrix

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix

Unter welchen Bedingungen existiert auch ein inverses Element?
Falls so ein Element existiert bezeichnen wir es mit A^{-1} . Es soll also gelten

$$A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}.$$

Nehmen wir auf beiden Seiten die Determinante, so erhalten wir

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det \mathbf{1} = 1,$$

also falls $\det A \neq 0$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

$\det A \neq 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Inversen. Es läßt sich zeigen, dass $\det A \neq 0$ auch eine hinreichende Bedingung ist.

Die inverse Matrix

Theorem

A^{-1} existiert genau dann, wenn $\det A \neq 0$.

Die Menge aller quadratische ($n \times n$) Matrizen mit $\det A \neq 0$ bildet daher bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.

Sei A eine ($n \times n$)-Matrix mit $\det A \neq 0$. Gesucht ist eine $n \times n$ -Matrix X

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

so dass gilt:

$$A \cdot X = \mathbf{1}$$

Die inverse Matrix

Wir multiplizieren die linke Seite aus und betrachten danach die j -te Spalte auf beiden Seiten:

$$a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \dots + a_{1n}x_{nj} = 0,$$

$$\dots = 0$$

$$a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \dots + a_{jn}x_{nj} = 1,$$

$$\dots = 0$$

$$a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \dots + a_{nn}x_{nj} = 0.$$

Diese n Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten x_{1j} , x_{2j} , ..., x_{nj} , welches mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus gelöst werden kann.

Die inverse Matrix

Da dies für jede Spalte j gilt, kann man so alle n^2 Unbekannten x_{ij} bestimmen.

Da die Koeffizienten der linken Seite des linearen Gleichungssystems immer gleich sind, verfährt man in der Praxis wie folgt:

Man schreibt die Gleichungen wie folgt an

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

und bringt dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus auf die Form

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array}$$

Die inverse Matrix

Die inverse Matrix A^{-1} ist dann gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir beginnen mit

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Berechnung der inversen Matrix

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 1. Zeile} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 2. Zeile} \\ \\ \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 2. Zeile} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{Multipliziere mit } \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 3. Zeile} \\ \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 3. Zeile} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Berechnung der inversen Matrix

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Somit ist A^{-1} gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teil VII

Folgen und Reihen

Folgen

Definition

Unter einer Folge (a_n) reeller Zahlen versteht man eine Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, in der jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird.

Beispiel:

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

definiert eine Folge.

Explizit: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{9}$, $a_4 = \frac{1}{16}$, $a_5 = \frac{1}{25}$, ...

Konvergente Folgen

Definition

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

a heißt Grenzwert der Folge oder Limes.

In anderen Worten liegen für eine konvergente Folge ab einem bestimmten N alle Folgenglieder im Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Divergente Folgen

Definition

Eine Folge nennt man **divergent**, wenn sie keinen Grenzwert hat, z.B. divergiert gegen $\pm\infty$.

Beispiele für divergente Folgen sind

$$a_n = n$$

$$a_n = 1 - n^2$$

Beschränkte Folgen

Definition

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq c$ (bzw. $a_n \geq c$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Die Umkehrung gilt nicht, eine beschränkte Folge ist nicht notwendiger Weise konvergent. Beispiel

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, (λa_n) , $(a_n b_n)$ konvergent ($\lambda \in \mathbb{R}$) und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Ist weiter $b \neq 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und wir können die Folge

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq N}$$

betrachten. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}.$$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Theorem

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle n .
Dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Bemerkung: Aus $a_n < b_n$ folgt nicht

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Das Beispiel $a_n = 0$ und $b_n = 1/n$ zeigt es:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, aber auch $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, und $0 < 0$ ist falsch.

Quiz

Die Folge

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ist

- (A) divergent
- (B) konvergent mit Grenzwert 0
- (C) konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- (D) konvergent mit Grenzwert 1

Reihen

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Man betrachtet nun die Folge (s_N) der Partialsummen

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n.$$

Als **unendliche Reihe** bezeichnet man nun die Folge dieser Partialsummen. Man schreibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n.$$

Eine unendliche Reihe heißt **konvergent**, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert (Grenzwert existiert). Ansonsten heißt die unendliche Reihe **divergent**.

Geometrische Reihe

Die geometrische Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Die Reihe konvergiert nur für $|x| < 1$ (sonst divergiert), weil folgendes gilt für die Partialsumme,

$$s_N = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Beweis: $s_N = 1 + x + x^2 + \dots + x^N$

$\frac{s_{N-1}}{x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{N-1} = s_{N-1}$ aber $s_{N-1} = s_N - x^N$ dann

$\frac{s_{N-1}}{x} = s_N - x^N$. Daraus folgt, dass $s_N(1-x) = 1 - x^{N+1}$. So zeigt

man, dass $s_N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$.

Harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Diese Reihe wird als harmonische Reihe bezeichnet. Diese Reihe ist divergent. Für die Partialsummen gilt

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Andere wichtige Reihen

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots\end{aligned}$$

Die Formel von Euler

Wir betrachten $\exp(ix)$:

$$\begin{aligned}\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x.\end{aligned}$$

Die Reihendarstellung liefert also einen einfachen Beweis der Formel von Euler:

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Ebenso findet man

$$\exp x = \cosh x + \sinh x.$$

Man beachte, dass für die Umordnung der Reihen die absolute Konvergenz notwendig ist.

Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Man kann die trigonometrischen und die hyperbolischen Funktionen auch durch die Exponentialfunktion ausdrücken:

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{2} \left(e^{ix} + e^{-ix} \right), & \sin x &= \frac{1}{2i} \left(e^{ix} - e^{-ix} \right), \\ \cosh x &= \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right), & \sinh x &= \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right).\end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Leichter zu merken:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

Additionstheoreme

Es ist

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i \sin(\beta)$$

und

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} e^{i\beta} &= [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)] [\cos(\beta) + i \sin(\beta)] \\ &= \cos(\alpha) \cos(\beta) + i \cos(\alpha) \sin(\beta) + i \sin(\alpha) \cos(\beta) + i^2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ &= [\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)] + i [\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)] \end{aligned}$$

Additionstheoreme

Somit folgt aus $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$

$$\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) = [\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)] + i[\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)]$$

Nimmt man nun den Real- bzw. Imaginärteil dieser Gleichung, so erhält man die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus.

Teil VIII

FUNKTIONEN

Definition

Seien D und W Teilmengen von \mathbb{R} . Unter einer reellwertigen Funktion auf D versteht man eine Abbildung

$$\begin{aligned} f &: D \rightarrow W, \\ x &\rightarrow y = f(x). \end{aligned}$$

Man nennt D den **Definitionsbereich** und W den **Wertebereich** der Funktion.

Eine Funktion f ordnet jedem $x \in D$ ein $y \in W$ zu.

Umkehrfunktion

Definition

Gibt es zu jedem $y \in W$ **genau ein** $x \in D$ mit $y = f(x)$, so ist die Funktion f umkehrbar. In diesem Fall bezeichnet man mit f^{-1} die Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: W \rightarrow D, \\ y &\rightarrow x = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Beispiel: Es sei $D = \mathbb{R}_0^+$ und $W = \mathbb{R}_0^+$ sowie

$$\begin{aligned} f &: D \rightarrow W, \\ x &\rightarrow x^2. \end{aligned}$$

Dann lautet die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} f^{-1} &: W \rightarrow D, \\ y &\rightarrow \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Grenzwerte von Funktionen

Definition

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = a$ den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

wenn sich die Funktion $f(x)$ bei unbegrenzter Annäherung von x an a unbegrenzt an A nähert. Die Funktion $f(x)$ muss an der Stelle $x = a$ den Wert A nicht annehmen und braucht auch nicht definiert sein. A könnte auch $\pm\infty$ sein.

Grenzwerte können auch einseitig sein

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A \text{ bei } (x < a) \text{ oder } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = B \text{ bei } (x > a)$$

Stetigkeit

Definition

Sei nun $a \in D$. Man bezeichnet eine Funktion als **stetig** im Punkte a , falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

gilt. Die einseitige Grenzwerte sind in diesem Fall gleich.

Definition

Man bezeichnet eine Funktion als in einem Intervall stetig, falls sie in jedem Punkt des Intervalls stetig ist.

Beispiele von Funktionen, die auf ganz \mathbb{R} stetig sind, sind Polynomfunktionen, $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$.

Die Heaviside-Funktion

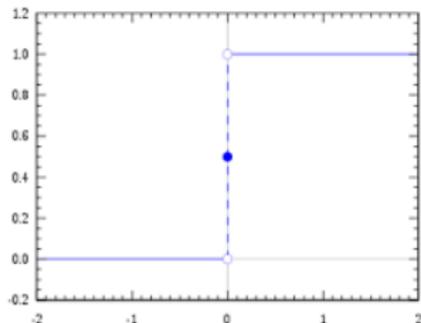
Beispiel: Wir betrachten die Heaviside-Funktion, definiert durch

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Für diese Funktion gilt $\Theta(0) = 0$, aber

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Theta(x) = 1.$$

Die Heaviside-Funktion ist im Punkte 0 **nicht stetig**.



Quelle:Wiki

Sätze über stetige Funktionen

Theorem

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die in x_0 stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann sind auch die Funktionen

$$f + g : D \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\lambda \cdot f : D \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$$

im Punkte x_0 stetig. Ist ferner $g(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbb{R}$$

in x_0 stetig, wobei $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-x} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + e^x & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

- (A) stetig
- (B) nicht stetig

Einigen Eigenschaften der reellen Funktionen

- **nach oben beschränkt**, wenn $\exists S \in \mathbb{R} : \forall x \in D f(x) \leq S$,
- **nach unten beschränkt**, wenn $\exists S \in \mathbb{R} : \forall x \in D f(x) \geq S$,
- **beschränkt**, wenn $\exists S \in \mathbb{R} : \forall x \in D |f(x)| \leq S$,
- **monoton wachsend**, wenn $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$,
- **monoton fallend**, wenn $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$,
- **streng monoton wachsend**, wenn $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$,
- **streng monoton fallend**, wenn $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Falls ferner $x \in D \Rightarrow -x \in D$ gilt, heißt eine Funktion

- **gerade**, wenn $f(-x) = f(x)$,
- **ungerade**, wenn $f(-x) = -f(x)$.

Rationale Funktionen

Definition

Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen. Unter einer rationalen Funktion versteht man eine Funktion

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion ist gegeben durch $D = \{x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0\}$.

Eine rationale Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig.

Polstelle: x -Wert für den die Funktion gegen Unendlich geht.

Asymptote: eine Gerade der sich die Kurve für große $|x|$ -Werte beliebig nahe annähert. Eine rationale Funktion kann Polstellen und Asymptoten haben, muss aber nicht.

Partialbruchzerlegung

Rationale Funktionen können in **Partialbrüche** zerlegt werden. Ist

$$\begin{aligned}p(x) &= p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0, \\q(x) &= q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \dots + q_1 x + q_0,\end{aligned}$$

und ist ausserdem die Faktorisierung des Nennerpolynoms bekannt

$$q(x) = c \prod_{j=1}^r (x - x_j)^{\lambda_j},$$

wobei λ_j die Multiziplicität der Nullstelle x_j angibt, so läßt sich die rationale Funktion schreiben als

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = P(x) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k},$$

wobei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $\deg p(x) - \deg q(x)$ ist und $a_{jk} \in \mathbb{R}$.

Partialbruchzerlegung

Berechnung von $P(x)$ und der Konstanten a_{jk} :

$P(x)$ bestimmt sich durch Polynomdivision mit Rest.

Wir betrachten als **Beispiel** die rationale Funktion

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x - 2)^2(x + 2)}$$

Für das Nennerpolynom haben wir

$$(x - 2)^2(x + 2) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8.$$

Polynomdivision

Polynomdivision mit Rest liefert

$$\begin{array}{r} (x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18) : (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) = (x + 5) + \frac{(2x^2 + 9x - 22)}{(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)} \\ -(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x \quad \quad \quad) \\ \hline \quad 5x^3 - 8x^2 - 11x + 18 \\ \quad -(5x^3 - 10x^2 - 20x + 40) \\ \hline \quad \quad 2x^2 + 9x - 22 \end{array}$$

Somit ist also $P(x) = x + 5$.

Partialbruchzerlegung

Für den Rest verwendet man den Ansatz

$$\frac{2x^2 + 9x - 22}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{a_{12}}{(x-2)^2} + \frac{a_{11}}{x-2} + \frac{a_{21}}{x+2}.$$

Man bringt die rechte Seite auf den Hauptnenner

$$\frac{a_{12}}{(x-2)^2} + \frac{a_{11}}{x-2} + \frac{a_{21}}{x+2} = \frac{(a_{11} + a_{21})x^2 + (a_{12} - 4a_{21})x + (2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21})}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{21} &= 2, \\ a_{12} - 4a_{21} &= 9, \\ 2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21} &= -22. \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

Durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}a_{11} + a_{21} &= 2, \\a_{12} - 4a_{21} &= 9, \\2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21} &= -22,\end{aligned}$$

findet man

$$a_{12} = 1, \quad a_{11} = 4, \quad a_{21} = -2.$$

Somit erhalten wir das Ergebnis

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)} = x + 5 + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x+2}.$$

Trick

Die Koeffizienten der Partialbrüche mit der **höchsten Potenz einer Nullstelle** lassen sich einfacher bestimmen, indem man im Ansatz mit $(x - x_j)^{\lambda_j}$ multipliziert und dann $x = x_j$ setzt.

In unserem Beispiel lassen sich so a_{12} und a_{21} bestimmen:

$$a_{12} = \frac{2x^2 + 9x - 22}{(x-2)^2(x+2)}(x-2)^2 \Big|_{x=2} = \frac{2x^2 + 9x - 22}{x+2} \Big|_{x=2} = \frac{8 + 18 - 22}{4} = 1,$$
$$a_{21} = \frac{2x^2 + 9x - 22}{(x-2)^2(x+2)}(x+2) \Big|_{x=-2} = \frac{2x^2 + 9x - 22}{(x-2)^2} \Big|_{x=-2} = \frac{8 - 18 - 22}{16} = -2.$$

Exponentialfunktion

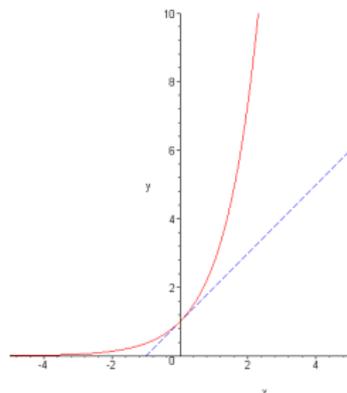
Definition

Die Exponentialfunktion ist

$$f(x) = e^x$$

Die Basis ist die Eulersche Zahl e .

Die Exponentialfunktion ist stetig, überall positiv, monoton wachsend und geht für große x -Werte gegen Unendlich schneller als jedes Polynom.



Quelle: L. Masetti

Logarithmus

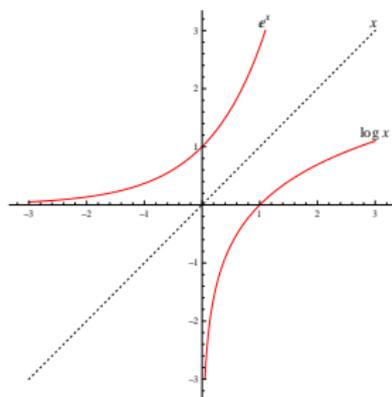
Definition

Der Logarithmus einer Zahl c zur Basis a ist die Hochzahl mit der man a potenzieren muss, um c zu erhalten:

$$a^{\log_a c} = c$$

Logarithmen zur Basis e heißen **natürliche Logarithmen**.

Der Logarithmus $y = \log(x)$ ist eine stetige und monotone Funktion, die nur für $x > 0$ definiert ist.



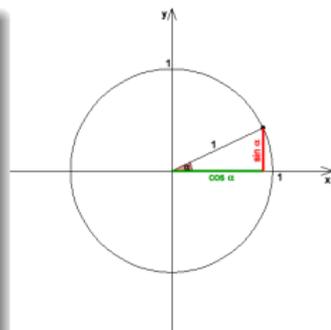
Quelle: Wiki

Trigonometrische Funktionen

Definition

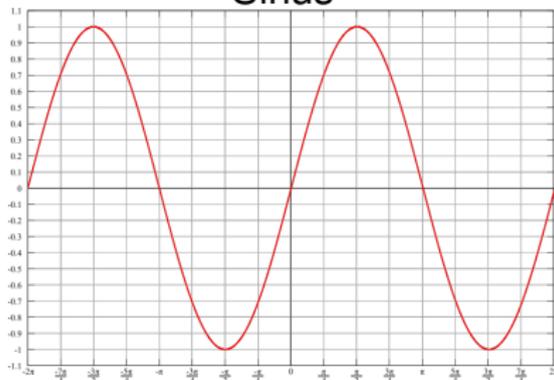
Die trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens sind so definiert:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{y}{r} & \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\end{aligned}$$

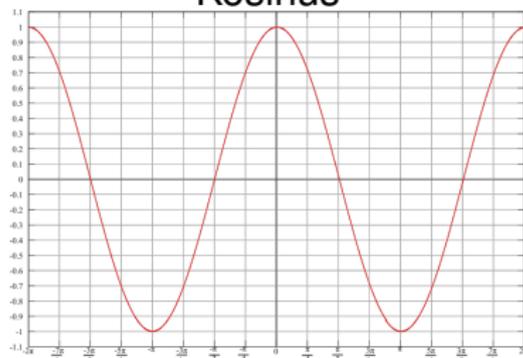


Quelle: L. Masetti

Sinus



Kosinus



Sinus und Kosinus

Nach Definition gilt:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\sin(\alpha + 2n\pi) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2n\pi) = \cos \alpha$$

Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

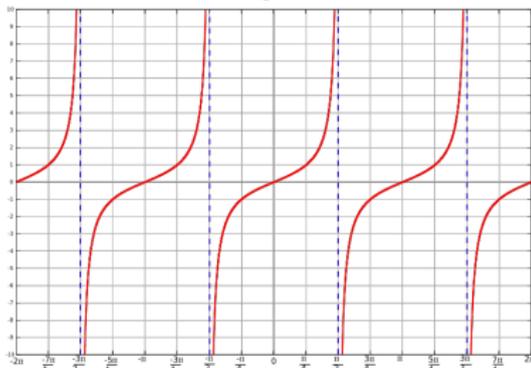
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

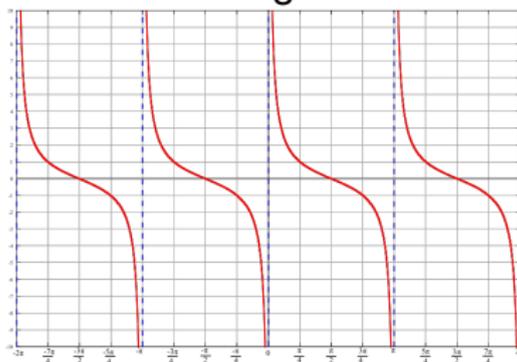
Tangens und Kotangens

Quelle: Wiki

Tangens



Kotangens



Periodische Funktionen mit Periode π

Polstellen bei $\pi/2 + n\pi$ bzw. $n\pi$

Additionstheoreme:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

Arkusfunktionen

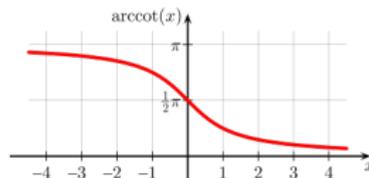
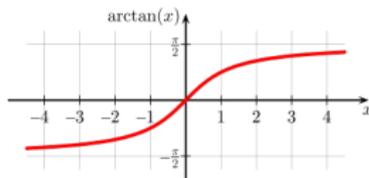
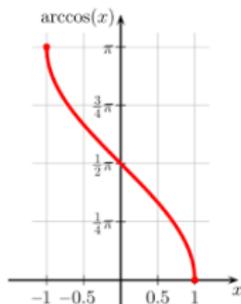
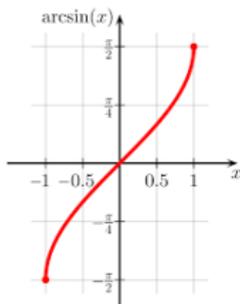
Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen werden mit \arcsin , \arccos , \arctan , etc. bezeichnet:

$$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x), \quad \text{Arkussinus}$$

$$\arccos(x) = \cos^{-1}(x), \quad \text{Arkuskosinus}$$

$$\arctan(x) = \tan^{-1}(x), \quad \text{Arkustangens}$$

$$\operatorname{arccot}(x) = \cot^{-1}(x), \quad \text{Arkuskotangens}$$



Quelle: Wiki

Hyperbolische Funktionen

Die hyperbolischen Funktionen sind

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}).$$

Daneben definiert man auch

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Bemerkung: Für \sinh und \cosh gilt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Die beschreiben eine Hyperbel anstatt eines Kreises.

Teil IX

DIFFERENTIALRECHNUNG

Die Ableitung

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f nennt man im Punkte $x_0 \in D$ **differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

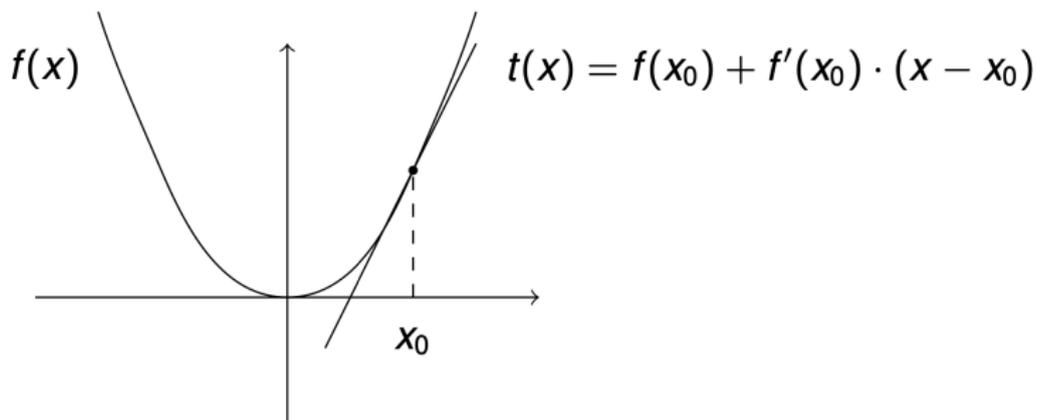
existiert.

Die Ableitung $f'(x_0)$ in x_0 ist eine reelle Zahl. Aber wir können auch $f'(x)$ für verschiedenen x als Funktion sehen. Man schreibt auch

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}.$$

Geometrische Bedeutung der Ableitung

Die Ableitung $f'(x_0)$ gibt die **Steigung der Tangente** im Punkte x_0 an:



Quelle: S. Weinzierl

Geometrische Bedeutung der Ableitung

Eine Gerade ist durch

$$y = ax + b = t(x)$$

definiert, wobei a die Steigung ist. D.h. für die Tangente $t(x)$ ist $a = f'(x_0)$. Der Wert von b wird festgestellt, durch die Bedingung, dass die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ gehen muss:

$$t(x_0) = f'(x_0)x_0 + b = f(x_0) \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Daraus folgt, dass

$$t(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7a/Graph_of_sliding_derivative_line.gif

Bemerkung

Eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion $f(x)$ ist dort auch stetig.

Beweis:

Annahme: $f'(x)$ existiert in x_0 .

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'(x) \cdot 0$$

Daraus folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Aber stetig in x_0 heisst nicht unbedingt differenzierbar in x_0 .

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

- (A) differenzierbar
- (B) nicht differenzierbar

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

- (A) differenzierbar
- (B) nicht differenzierbar

Wichtige Ableitungen

Ableitungen einiger **Grundfunktionen**:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1},$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.$$

Ableitungen von **Sinus** und **Kosinus**:

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x),$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x).$$

Sätze über Ableitungen

Theorem

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann sind auch die Funktionen $f + g$, und λf in x differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\ (\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x).\end{aligned}$$

Theorem

Produktregel:

Mit den Voraussetzungen wie oben ist auch die Funktion $f \cdot g$ in x differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Beweis der Produktregel

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x) &= \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)] \\&= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \\&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} \\f'(x) &= \underbrace{2x}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} + \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)}\end{aligned}$$

Sätze über Ableitungen

Theorem

Quotientenregel: Ist weiter $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch die Funktion f/g in x differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$$
$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x + 1) - (2x - 3) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2}$$

Sätze über Ableitungen

Theorem

Kettenregel: Seien $f : D_1 \rightarrow W_1$ und $g : D_2 \rightarrow W_2$ Funktionen mit $W_1 \subset D_2$. Falls f im Punkte $x \in D_1$ differenzierbar ist und g im Punkte $y = f(x) \in D_2$ differenzierbar ist, so ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : D_1 \rightarrow W_2$ in x differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Beispiel:

$$f(x) = \sin(3x^2 + 4x + 5)$$

$$f'(x) = (6x + 4) \cdot \cos(3x^2 + 4x + 5)$$

Sätze über Ableitungen

Theorem

Ableitung der Umkehrfunktion: Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : D \rightarrow W$ eine stetige, streng monotone Funktion und $f^{-1} : W \rightarrow D$ die Umkehrfunktion. Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und ist $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} im Punkt $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion

Beispiel:

Die Ableitung des **Logarithmus** erhält man mit Hilfe der Regel über die Umkehrfunktion: Wir beginnen mit der Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$. Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus:

$$f^{-1}(y) = \ln y$$

Nun ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y},$$

also

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Ableitungen

Beispiel: Die Ableitungen von **Sinus** und **Kosinus** erhält man aus der Darstellung

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} \left(e^{ix} - e^{-ix} \right), \quad \cos(x) = \frac{1}{2} \left(e^{ix} + e^{-ix} \right)$$

zu

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x),$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x).$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2i} \left(e^{ix} - e^{-ix} \right) \right] = \frac{1}{2i} \left(\frac{d}{dx} e^{ix} - \frac{d}{dx} e^{-ix} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(i e^{ix} + i e^{-ix} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{ix} + e^{-ix} \right) = \cos(x) \end{aligned}$$

Weitere wichtige Ableitungen

Die Ableitung aller weiteren trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen lassen sich ebenfalls mit den obigen Regeln bestimmen:

$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

$$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$f(x) = \sinh(x) \Rightarrow f'(x) = \cosh(x),$$

$$f(x) = \cosh(x) \Rightarrow f'(x) = \sinh(x),$$

$$f(x) = \tanh(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)},$$

$$f(x) = \operatorname{arsinh}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f(x) = \operatorname{artanh}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Quiz

$$f(x) = 3x^3 - 4$$

$$f'(x) = ?$$

(A) $\frac{3}{4}x^4 - 4x$

(B) $9x^2 - 4$

(C) $9x^2$

(D) $3x^2 - 4$

Quiz

$$f(x) = \sin(\cos(2x))$$
$$f'(x) = ?$$

- (A) $2 \cos(\cos(2x))$
- (B) $2 \sin(2x) \cdot \cos(\cos(2x))$
- (C) $-2 \cos(2x) \cdot \cos(\sin(2x))$
- (D) $-2 \sin(2x) \cdot \cos(\cos(2x))$

Höhere Ableitungen

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls wieder differenzierbar, so bezeichnet man mit

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = (f')'(x)$$

die **zweite Ableitung**. Ist auch $f''(x)$ wieder differenzierbar, so erhält man durch Ableiten die dritte Ableitung $f'''(x)$. Allgemein schreiben wir für die **n -te Ableitung**

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Unter der **0-ten Ableitung** einer Funktion versteht man die Funktion selbst.

Höhere Ableitungen

Beispiel:

$$f(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 5$$

$$f'(x) = 15x^4 + 28x^3 + 6x^2 + 2x - 1$$

$$f''(x) = 60x^3 + 84x^2 + 12x + 2$$

$$f'''(x) = 180x^2 + 168x + 12$$

$$f^{(4)}(x) = 360x + 168$$

$$f^{(5)}(x) = 360$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

Höhere Ableitungen

Beispiel:

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

$$f'''(x) = -\cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

$$f^{(5)}(x) = \cos(x)$$

Quiz

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{2x} \\ f^{(4)}(x) &= ?\end{aligned}$$

- (A) e^{2x}
- (B) $2e^{2x}$
- (C) $16e^{2x}$
- (D) $24e^{2x}$

Stetige Differenzierbarkeit

Definition

Eine Funktion $f(x)$ nennt man **stetig differenzierbar**, falls sie differenzierbar ist und die Ableitung $f'(x)$ stetig ist.

Definition

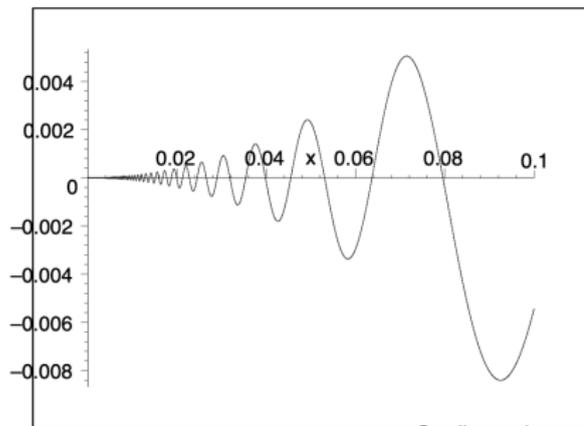
Eine Funktion $f(x)$ nennt man **n -mal stetig differenzierbar**, falls sie n -mal differenzierbar ist und die n -te Ableitung $f^{(n)}(x)$ stetig ist.

Eine differenzierbare, aber nicht stetig differenzierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f ist differenzierbar im Punkt $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0.$$



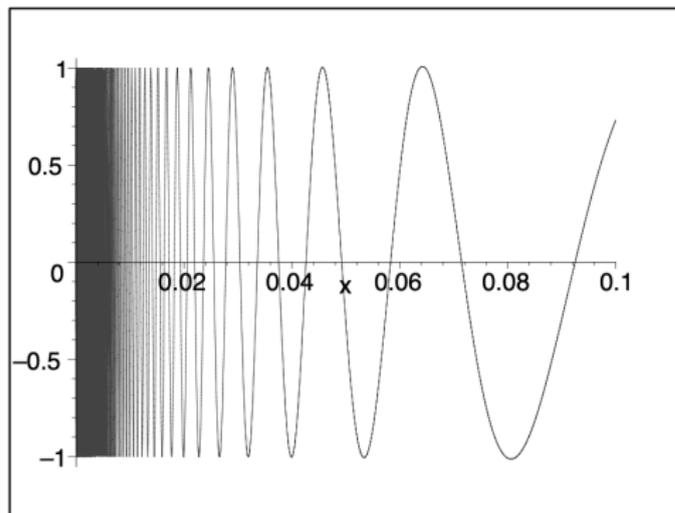
Quelle: mathematik.uni-marburg.de

Eine differenzierbare, aber nicht stetig differenzierbare Funktion

Aber, die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f' ist nicht stetig im Punkt $x = 0$.



Quelle:mathematik.uni-marburg.de

Teil X

TAYLOR ENTWICKLUNG + REGELN VON L'HOSPITAL

Taylorreihen

Motivation:

- Wir haben die **Reihendarstellung** einiger Funktionen, wie zum Beispiel der Exponentialfunktion, Sinus oder Kosinus kennengelernt.
- In diesem Abschnitt geht es um die **systematische Entwicklung** von Funktionen **in Potenzreihen**.

Taylorentwicklung

Theorem (Taylorsche Formel)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x_0 \in I$ und $x \in I$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_{n+1}(x).$$

Für das Restglied gilt: Es gibt ein ξ zwischen x_0 und x (d.h. $\xi \in [x_0, x]$ für $x > x_0$ bzw. $\xi \in [x, x_0]$ für $x < x_0$), so dass

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Bemerkung: Dies ist eine Existenzaussage, ξ ist im allgemeinen schwer zu bestimmen.

Taylorentwicklung

- In der Praxis verwendet man die ersten n Terme der Taylorentwicklung, um eine Funktion zu approximieren und vernachlässigt das Restglied.
- Das vernachlässigte Restglied liefert den Fehler dieser Abschätzung.

Beispiele:

$$1) \quad f(x) = \cos(x)$$

Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ wird

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$2) \quad f(x) = \cos(x \cdot e^x) + \sin(x^2 \cdot e^{-x})$$

Taylorentwicklung um $x_0 = 0$:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - 2x^3 - \frac{11}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + \mathcal{O}(x^6)$$

Taylorreihen

Definition (Taylorreihe)

Sei nun $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Wir definieren die Taylorreihe einer Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0 :

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Bemerkungen:

- Falls die Taylorreihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f .

Taylorreihen

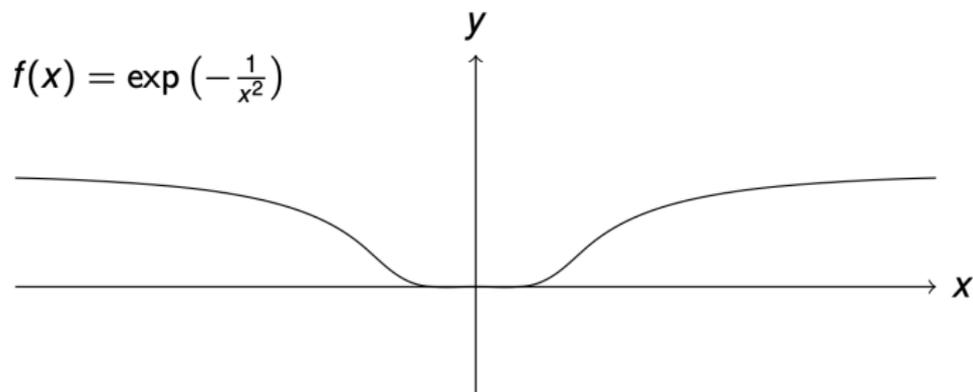
Wir geben ein Beispiel zu dieser Punkt an: Wir betrachten die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

im Punkte $x_0 = 0$. f ist beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Die Taylorreihe von f um den Nullpunkt ist also identisch Null, aber die Funktion f ist nicht identisch Null in der Nähe von $x_0 = 0$.



Die erste Regel von l'Hospital

Theorem

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in D$ stetige Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Weiter seien f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar. Existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$, so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2}.$$

Die zweite Regel von l'Hospital

Theorem

Ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ und existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$,
so gilt ebenfalls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Die Regeln von l'Hospital

Die Regeln von de l'Hospital erlauben es in vielen Fällen, den Grenzwert von Funktionen selbst dann noch zu bestimmen, wenn deren Funktionsterm beim Erreichen der betreffenden Grenze einen unbestimmten Ausdruck wie etwa

$$\frac{0}{0}, \pm \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \dots$$

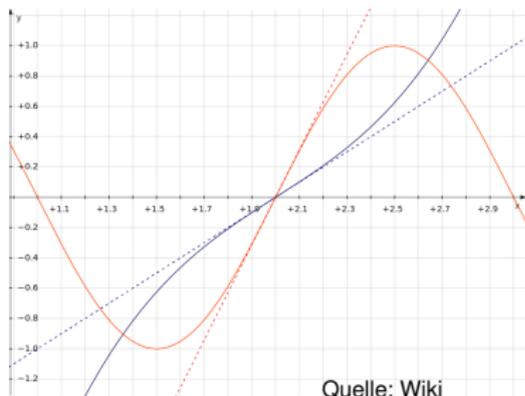
Anschauliche Erklärung

Die Regel von de L'Hospital beruht ihrem Prinzip nach darauf, dass jedes an einer Stelle x_0 differenzierbare Funktionspaar f und g sich damit in dem Punkt auch durch ihr dortiges Tangentenpaar annähern lässt. Die Tangenten lassen sich wie folgt formulieren:

$$f_T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{und} \quad g_T(x) = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$$

so dass in $x \rightarrow x_0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f_T(x)}{g_T(x)} = \frac{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}{g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)} \approx \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$



Quiz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4}{x^2 + 6x + 5} = ?$$

- (A) 0
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) $\frac{3}{2}$
- (D) 3

Quiz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 5x^2 - 3x - 1}{x^3 - 20x^2 + x + 10} = ?$$

- (A) 0
- (B) $-\frac{1}{10}$
- (C) 7
- (D) 21

Quiz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = ?$$

- (A) 0
- (B) ∞
- (C) $-\infty$
- (D) 1

Quiz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin x} = ?$$

- (A) 0
- (B) ∞
- (C) $\frac{5}{4}$
- (D) $\frac{4}{5}$

Quiz

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot x^2 = ?$$

- (A) 1
- (B) $-\infty$
- (C) $+\infty$
- (D) 0

Teil XI

INTEGRALRECHNUNG

Treppenfunktionen

Definition

Man nennt $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **Treppenfunktion**, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

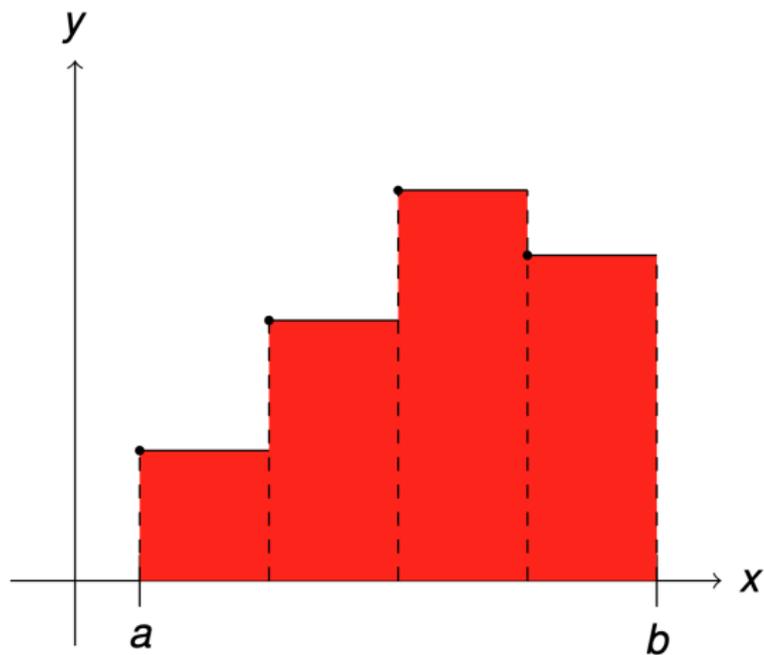
gibt, so dass t auf jedem offenen Intervall $]x_{j-1}, x_j[$ konstant ist. Der Wert auf diesem Intervall sei mit c_j bezeichnet.

Definition

Das **Integral einer Treppenfunktion** wird definiert als

$$\int_a^b t(x) \, dx = \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}).$$

Treppenfunktionen



Quelle: S. Weinzierl

Ober- und Unterintegrale

- Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ bilden einen Vektorraum.
- Wir bezeichnen diesen Vektorraum mit $T[a, b]$.
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion und $t \in T[a, b]$.
Man schreibt $f \geq t$ falls $f(x) \geq t(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Definition

Wir definieren nun das Ober- und Unterintegral für f :

$$\int_a^{b^*} f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b t(x) dx; t \in T[a, b], t \geq f \right\},$$
$$\int_a^* f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b t(x) dx; t \in T[a, b], t \leq f \right\}.$$

Das Riemann-Integral

Definition

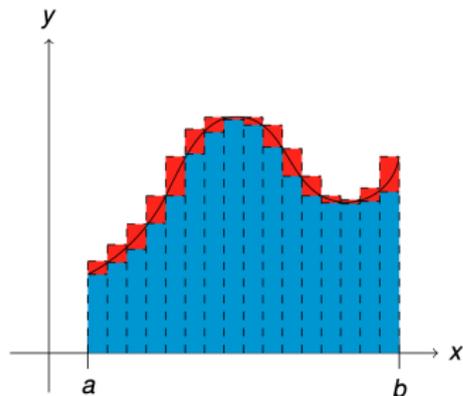
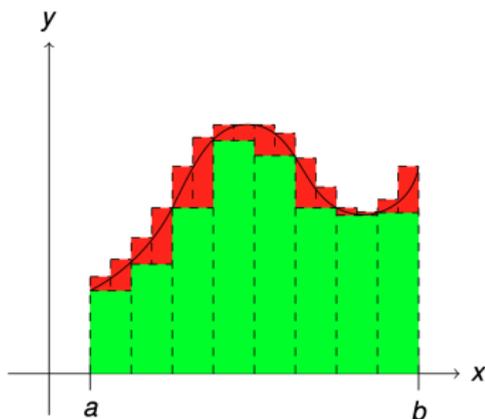
Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, falls

$$\int_a^{b^*} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

In diesem Fall setzt man

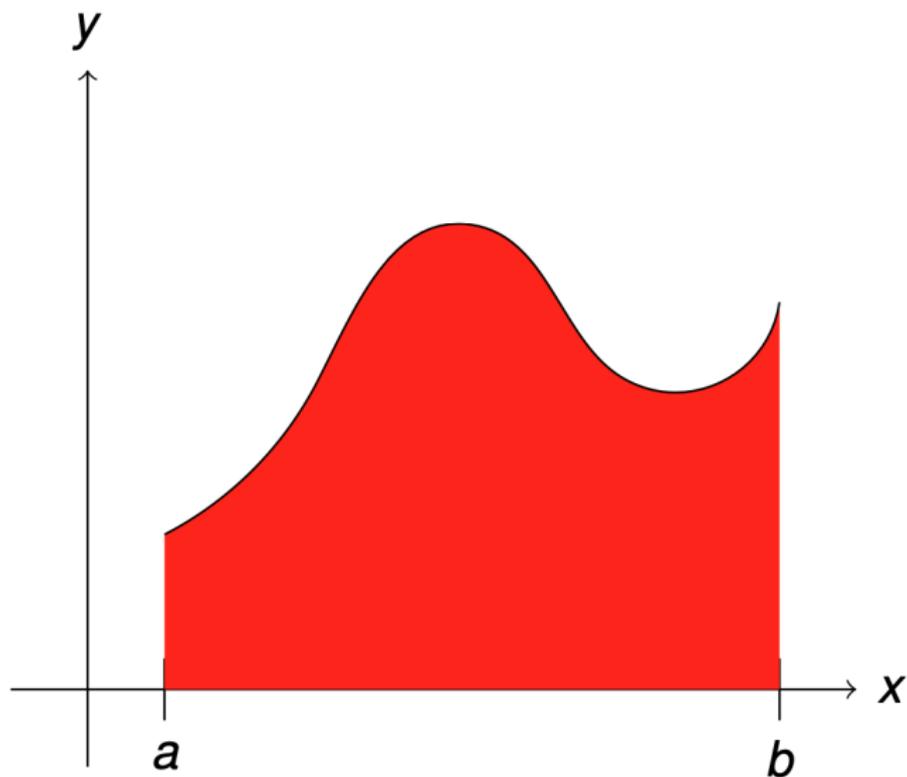
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b^*} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Approximation durch Treppenfunktionen



Quelle: S. Weinzierl

Geometrische Interpretation des Integrals



Sätze über integrierbare Funktionen

Theorem

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Theorem

Jede monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Theorem

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $\lambda \cdot f$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx,$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx.$$

Sätze über integrierbare Funktionen

Theorem

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $f \cdot g$ integrierbar.

Im Allgemeinen ist allerdings

$$\int_a^b (f \cdot g)(x) \, dx \neq \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x) \, dx \right).$$

Stammfunktionen

Definition

Eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, falls $F'(x) = f(x)$.

Eine weitere Funktion $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ebenfalls eine Stammfunktion, falls $F - G$ eine Konstante ist.

Man schreibt auch

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird auch als **unbestimmtes Integral** bezeichnet.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Theorem

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Man schreibt auch

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Stammfunktionen

Stammfunktionen einiger Grundfunktionen:

$$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1,$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x,$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln |x|,$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x),$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x),$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow F(x) = \arctan(x).$$

Quiz

Gesucht ist eine Stammfunktion zu

$$3x^2 - 4x + 5$$

- (A) $6x - 4$
- (B) $3x^3 - 4x^2 + 5x$
- (C) $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5x$
- (D) $x^3 - 2x^2 + 5x + 42$

Substitutionsregel

Theorem

Sei $f : [a, b] \rightarrow W_1$ eine stetig differenzierbare Funktion und $g : D_2 \rightarrow W_2$ eine stetige Funktion mit $W_1 \subset D_2$. Dann gilt

$$\int_a^b g(f(x)) f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx.$$

Substitutionsregel

Beispiel:

Wir betrachten das Integral

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta (5 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta + 1).$$

Für die Substitution $u = -\cos \theta$ gilt

$$\frac{du}{d\theta} = \sin \theta$$

und daher ergibt sich mit Hilfe der Substitutionsregel

$$I = \int_{-1}^1 du (5u^2 - 3u + 1) = \left(\frac{5}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + u \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{3}.$$

Partielle Integration

Theorem

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Partielle Integration

Beispiel:

Wir betrachten das Integral

$$I = \int_0^1 dx x e^x.$$

Setzen wir $f(x) = x$ und $g'(x) = \exp(x)$, so läßt sich die partielle Integration anwenden, falls wir eine Stammfunktion zu $g'(x)$ kennen. In diesem Beispiel ist dies besonders einfach, es ist $g(x) = \exp(x)$. Somit erhalten wir

$$I = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx e^x = (x - 1) e^x \Big|_0^1 = 1.$$

Integrale über rationale Funktionen

Wir betrachten als Beispiel

$$I = \int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)} dx.$$

Im ersten Schritt zerlegt man den Integranden mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)} = x + 5 + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x+2}.$$

Somit ist

$$I = \int_0^1 (x+5) dx + \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} + 4 \int_0^1 \frac{dx}{x-2} - 2 \int_0^1 \frac{dx}{x+2}.$$

Integrale über rationale Funktionen

$$I = \int_0^1 (x+5) dx + \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} + 4 \int_0^1 \frac{dx}{x-2} - 2 \int_0^1 \frac{dx}{x+2}.$$

Wir berechnen nun die einzelnen Integrale:

$$\int_0^1 (x+5) dx = \left. \frac{1}{2}x^2 + 5x \right|_0^1 = \frac{11}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} = \left. -\frac{1}{x-2} \right|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-2} = \ln(|x-2|) \Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln(|x+2|) \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2,$$

Integrale über rationale Funktionen

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)} dx \\ &= \frac{11}{2} + \frac{1}{2} + 4(-\ln 2) - 2(\ln 3 - \ln 2) \\ &= 6 - 2\ln 2 - 2\ln 3 \\ &= 6 - 2\ln 6. \end{aligned}$$

Uneigentliche Integrale

Definition

Unter einem uneigentlichen Integral versteht man ein Integral, bei dem eine Integrationsgrenze unendlich ist oder bei dem der Integrand an einer Integrationsgrenze nicht definiert ist. Es kann auch eine Kombination der beiden Fälle auftreten.

Uneigentliche Integrale

Wir betrachten zunächst den Fall, dass eine Integrationsgrenze unendlich ist. Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, \Lambda]$ mit $a < \Lambda < \infty$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_a^{\Lambda} f(x) dx$$

existiert, nennt man das Integral von a bis Unendlich konvergent und man setzt

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_a^{\Lambda} f(x) dx.$$

Analog definiert man das Integral für das Intervall $] - \infty, b]$.

Uneigentliche Integrale

Beispiel:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_1^{\Lambda} \frac{dx}{x^2} = - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \Big|_1^{\Lambda} = 1 - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\Lambda} = 1.$$

Uneigentliche Integrale

Wir betrachten nun den Fall, dass der Integrand an einer Intervallgrenze nicht definiert ist. Sei $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a + \varepsilon, b]$ mit $0 < \varepsilon < (b - a)$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx$$

existiert, nennt man das Integral über $[a, b]$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx$$

Analog definiert man das Integral für den Fall in der die Funktion an der oberen Intervallgrenze nicht definiert ist.

Uneigentliche Integrale

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\varepsilon} = 2.$$

Uneigentliche Integrale: Allgemeiner Fall

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ Riemann-integrierbar ist und sei $c \in]a, b[$ beliebig. Falls die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^c f(x) dx, \quad \int_c^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_c^{\beta} f(x) dx$$

existieren, nennt man das Integral über $]a, b[$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Teil XII

FUNKTIONEN MEHRERERER VARIABLEN

Funktionen mehrerer Variablen

Definition

Sei U eine Teilmenge des \mathbb{R}^n . Wir betrachten Funktionen

$$\begin{aligned} f &: U \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Beispiel $U = \mathbb{R}^2$.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Partielle Ableitung

Definition

Die Funktion f ist **partiell differenzierbar in der i -ten Koordinate**, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

existiert.

Man schreibt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}.$$

Diese Formel zeigt auch, wie man die i -te partielle Ableitung berechnet: Man hält alle anderen Variablen $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fest und nimmt die gewöhnliche Ableitung nach der Variablen x_i .

Partielle Differenzierbarkeit

Definition

Wir nennen eine Funktion **partiell differenzierbar**, falls sie in allen Variablen partiell differenzierbar ist.

Definition

Ebenso nennen wir eine Funktion **stetig partiell differenzierbar**, falls sie partiell differenzierbar ist und alle Ableitungen stetig sind.

Partielle Ableitungen

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Quiz

$$f(x, t) = A \sin(x - vt)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = ?$$

- (A) $A \cos(x - vt)$
- (B) $-A \cos(x - vt)$
- (C) $vA \cos(x - vt)$
- (D) $-vA \cos(x - vt)$

Höhere partielle Ableitungen

Definition

Wir können partielle Ableitungen auch hintereinander ausführen und erhalten höhere Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) \right).$$

Man beachte, dass diese Schreibweise impliziert, dass zunächst die Ableitung nach x_j ausgeführt wird, und das Zwischenergebnis dann nach x_i abgeleitet wird.

Wir interessieren uns dafür unter welchen Voraussetzungen das Endergebnis nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängt.

Höhere partielle Ableitungen

Theorem

Sei f zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n)$$

Theorem

Allgemeiner gilt: Ist f k -mal stetig partiell differenzierbar, so vertauschen die k -ten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_1)}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_k)}} f(x_1, \dots, x_n),$$

wobei σ eine Permutation von (i_1, \dots, i_k) ist.

Höhere partielle Ableitungen

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_1^3 + 3x_1x_2^2 + x_1x_2x_3$$

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} (6x_1x_2 + x_1x_3) = 6x_2 + x_3 \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} (3x_1^2 + 3x_2^2 + x_2x_3) = 6x_1.$$

Quiz

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2^3$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = ?$$

- (A) 0
- (B) $9x_1^2$
- (C) $18x_1 x_2^2$
- (D) $9x_1^2 x_2^2 + 6x_1 x_2^3$

Teil XIII

FEHLERRECHNUNG

Motivation

- Jede physikalische Messung ist mit Fehlern behaftet.
- Wir unterscheiden zwei Arten von Fehlern:
 - ▶ systematische Fehler, die z.B. durch fehlerhaft justierte Messapparaturen oder andere Unzulänglichkeiten des Messverfahrens entstehen,
 - ▶ statistische Fehler, die durch zufällige Einflüsse auf einzelne Messungen entstehen.
- Wenn eine Messung wiederholt wird, variieren die statistischen Fehler, die systematischen Fehler bleiben gleich.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wenn wir eine Messung beliebig oft wiederholen könnten, würden wir eine Streuung der Messwerte beobachten, bei der Werte in verschiedenen Intervallen verschieden häufig auftauchen.

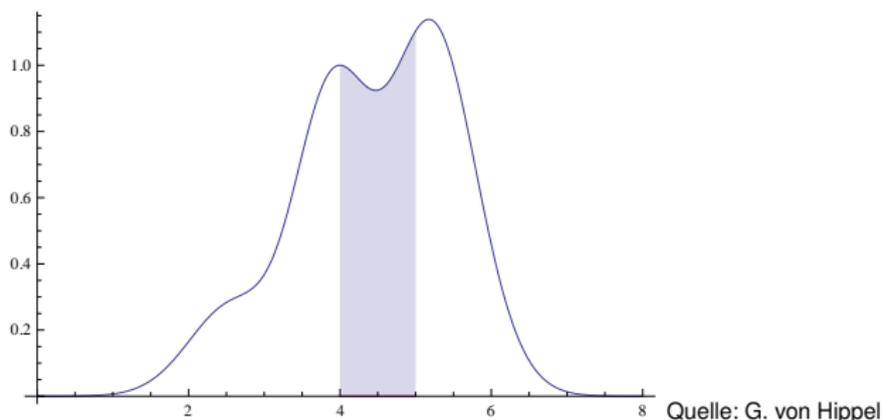
Gesetz der großen Zahlen

Bei N -facher Messung einer zufällig verteilten Größe gilt für die relative Häufigkeit, mit der das Ergebnis E erzielt wird,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(E)}{N} = P(E)$$

wobei $P(E)$ die Wahrscheinlichkeit von E ist.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen



Für kontinuierlich verteilte Größen gilt

$$P(x \in [a; b]) = \int_a^b p(y) dy$$

mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (Dichte) $p : \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty)$, die $p(y) \geq 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} p(y) dy = 1$ genügt.

Erwartungswert und Varianz

- Bei N -facher Wiederholung einer Messung ist der mittlere Messwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

und nach dem Gesetz der großen Zahlen erwarten wir hierfür im Limes $N \rightarrow \infty$

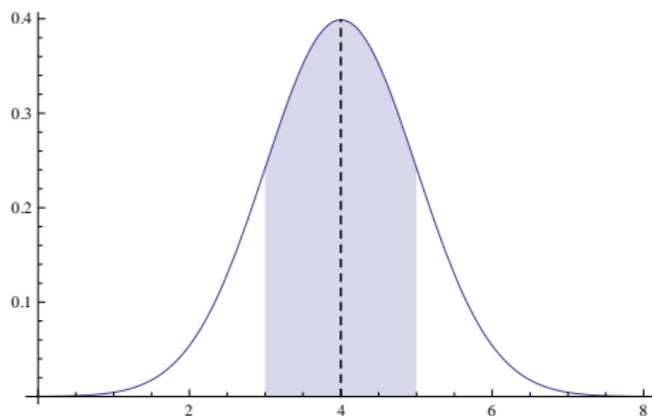
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

was den Erwartungswert definiert.

- Als ein Maß für die mittlere Streuung der Ergebnisse um den Erwartungswert definieren wir ferner die Varianz

$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Die Normalverteilung

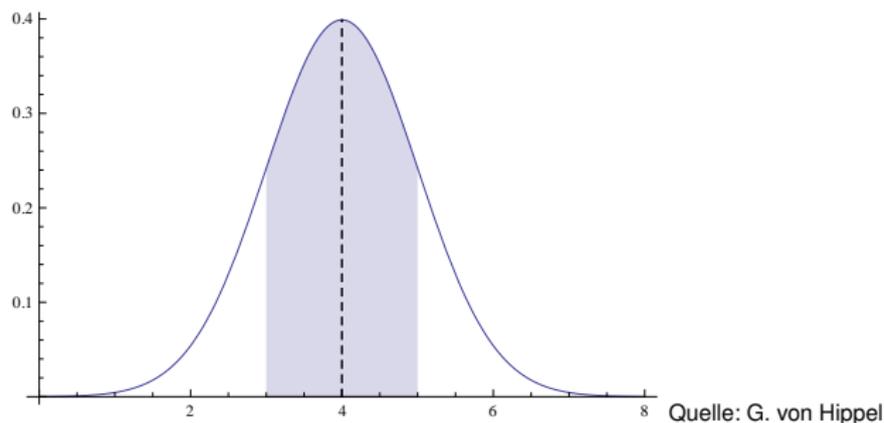


Eine besonders wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die sogenannte Normalverteilung (oder Gauss-Verteilung)

$$p_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 .

Die Normalverteilung



Für eine normalverteilte Zufallsgröße gilt:

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 68.27\%,$$

$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.45\%,$$

$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.73\%.$$

Quiz

Ein Experiment misst eine Größe O und berichtet

$$O = 5.94 \pm 0.02$$

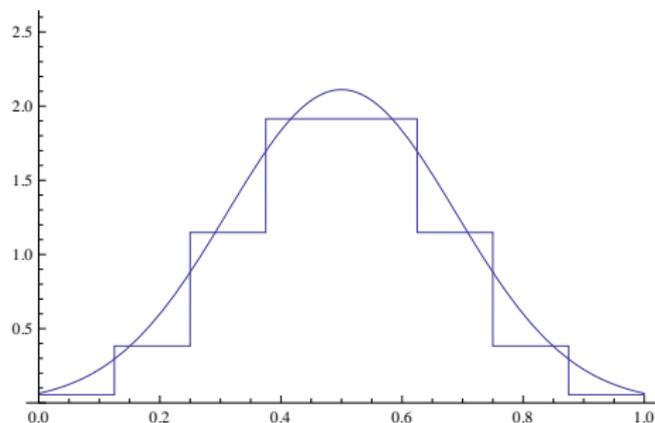
Dies bedeutet:

- (A) Der wahre Wert der Observablen O ist 5.94.
- (B) Der wahre Wert der Observablen O liegt im Intervall $[5.92, 5.96]$.
- (C) Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Observablen O im Intervall $[5.92, 5.96]$ liegt, beträgt 99.7%.
- (D) Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Observablen O im Intervall $[5.92, 5.96]$ liegt, beträgt 68.3%, falls der Meßwert einer Normalverteilung folgt.

Der Zentrale Grenzwertsatz

Zentraler Grenzwertsatz

Seien x_1, \dots, x_N unabhängig voneinander identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann ist im Limes $N \rightarrow \infty$ der Mittelwert $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{N}$.

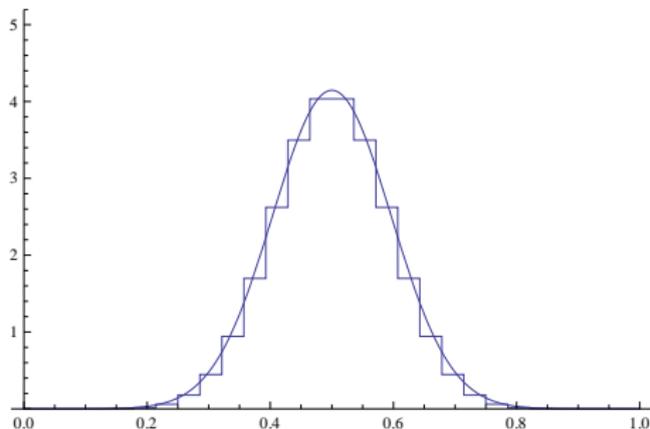


Quelle: G. von Hippel

Der Zentrale Grenzwertsatz

Zentraler Grenzwertsatz

Seien x_1, \dots, x_N unabhängig voneinander identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann ist im Limes $N \rightarrow \infty$ der Mittelwert $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{N}$.

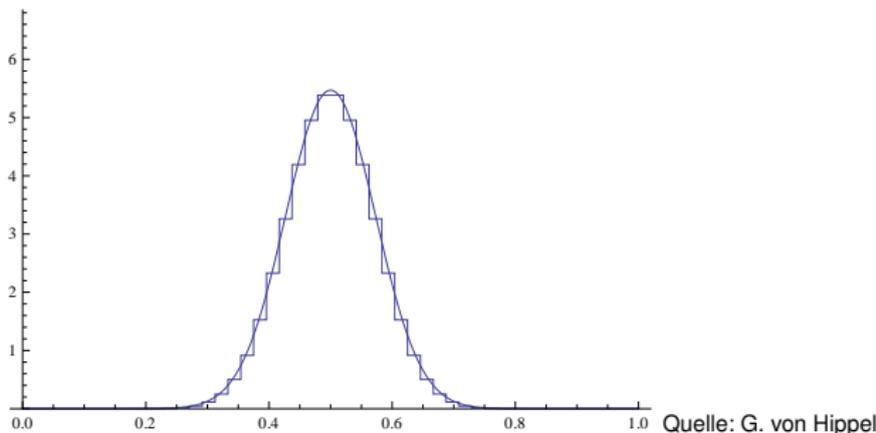


Quelle: G. von Hippel

Der Zentrale Grenzwertsatz

Zentraler Grenzwertsatz

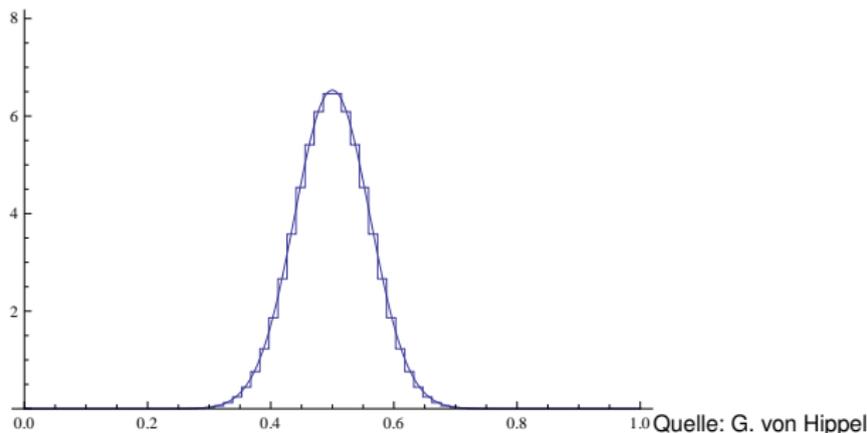
Seien x_1, \dots, x_N unabhängig voneinander identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann ist im Limes $N \rightarrow \infty$ der Mittelwert $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{N}$.



Der Zentrale Grenzwertsatz

Zentraler Grenzwertsatz

Seien x_1, \dots, x_N unabhängig voneinander identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann ist im Limes $N \rightarrow \infty$ der Mittelwert $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{N}$.



Fehlerfortpflanzung

Problemstellung: Gesucht wird eine Größe $f = f(x, y)$ die von zwei weiteren Größen x und y abhängt. Die Funktion f wird als bekannt vorausgesetzt, die Größen x und y werden durch eine Messung mit Fehlern $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$ bestimmt.

Gesucht ist nun der Fehler für die Größe f .

Für die Größe f beginnen wir mit der Taylorentwicklung:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \dots$$

Wir nehmen an, dass wir n Messungen für die Größen x und y haben, die einzelnen Meßwerte seien mit x_j und y_j bezeichnet. Somit haben wir auch n Ergebnisse für f . Für die Abweichung eines Einzelergebnisses vom Mittelwert gilt für kleine Abweichungen

$$f_j - \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x_j - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y_j - \bar{y}) + \dots$$

Fehlerfortpflanzung

$$f_j - \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x_j - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y_j - \bar{y}) + \dots$$

Somit gilt für die Varianz:

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (f_j - \bar{f})^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[(x_j - \bar{x})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (y_j - \bar{y})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 2 (x_j - \bar{x}) (y_j - \bar{y}) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right]\end{aligned}$$

Kovarianz

Wir definieren die **Kovarianz** als

$$\text{Cov}(x, y) = \sigma_{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

Somit haben wir

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \sigma_{xy}.$$

Unkorrelierte Zufallsgrößen

Falls x und y unkorreliert sind, gilt $\sigma_{xy} = 0$ und somit

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2,$$

bzw.

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2}.$$

Beispiele: Addition

- 1 $f = x + y$. In diesem Fall haben wir

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2},$$

man sagt, die (absoluten) Fehler addieren sich quadratisch.

Beispiele: Addition

$$f = x + y, \quad \sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Es sei $x = 15 \pm 3$ und $y = 17 \pm 4$.

Es ist

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \bar{x} + \bar{y} = 15 + 17 = 32, \\ \sigma_f &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.\end{aligned}$$

Somit

$$f = 32 \pm 5.$$

Beispiele: Subtraktion

$f = x - y$. Hier findet man wie bei einer Summe

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Beispiele: Multiplikation

$f = x \cdot y$. In diesem Fall findet man

$$\sigma_f = \sqrt{y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2},$$

oder anders geschrieben

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Bei einem Produkt addieren sich die relativen Fehler quadratisch.

Beispiele: Multiplikation

Konkretes Beispiel

$$f = x \cdot y, \quad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Es sei $x = 2 \pm 0.06$ und $y = 5 \pm 0.2$.

Es ist

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \bar{x} \cdot \bar{y} = 2 \cdot 5 = 10, \\ \sigma_f &= f \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = 10 \sqrt{\left(\frac{6}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{50}\right)^2} = \frac{10}{\sqrt{400}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Somit

$$f = 10 \pm 0.5.$$

Quiz

Es sei $x = 17 \pm 4$ und $y = 15 \pm 3$, sowie

$$f = x - y.$$

Mittelwert und Fehler für f ergeben sich zu

(A) $f = 2 \pm 1$

(B) $f = 2 \pm \sqrt{7}$

(C) $f = 2 \pm 4$

(D) $f = 2 \pm 5$

Beispiele: Division

$f = \frac{x}{y}$. In diesem Fall findet man

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{y^2}\sigma_x^2 + \frac{x^2}{y^4}\sigma_y^2}.$$

Schreibt man dies mit Hilfe der relativen Fehler erhält man wie beim Produkt

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Beispiele: Division

Konkretes Beispiel:

$$f = \frac{x}{y}, \quad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Es sei $x = 2 \pm 0.06$ und $y = 5 \pm 0.2$.

Es ist

$$\bar{f} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{2}{5} = 0.4,$$

$$\sigma_f = f \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = \frac{2}{5} \sqrt{\left(\frac{0.06}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} \sqrt{\left(\frac{6}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{50}\right)^2} = \frac{2}{5\sqrt{400}} = \frac{1}{50}.$$

Somit

$$f = 0.4 \pm 0.02.$$

Beispiele: Potenzen

Zum Abschluss betrachten wir noch $f = x^a y^b$. Man erhält

$$\sigma_f = \sqrt{(ax^{a-1}y^b)^2 \sigma_x^2 + (bx^a y^{b-1})^2 \sigma_y^2}$$

Auch hier empfiehlt es sich wieder, die Formel in relativen Fehler zu schreiben:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{a^2 \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + b^2 \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Viel Spaß im Studium!