

### Aufgabe 1: Eigenschaften reeller Funktionen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen, ob sie beschränkt und/oder monoton sind:

- |     |                   |     |                          |
|-----|-------------------|-----|--------------------------|
| (a) | $f(x) = x^2$      | (d) | $f(x) = \sin(x^2)$       |
| (b) | $f(x) = e^{-x^2}$ | (e) | $f(x) = e^x + e^{-x}$    |
| (c) | $f(x) = \sin(x)$  | (f) | $f(x) = x \log(x^2 + 1)$ |

### Aufgabe 2: Grenzwerte

Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Funktionen:

- |     |   |     |   |
|-----|---|-----|---|
| (a) | $\lim_{x \rightarrow 0} x^2$            | (d) | $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{x^2}}$ |
| (b) | $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x)$      |     |   |
| (c) | $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(x)$ | (e) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$        |

### Aufgabe 3: Trigonometrische Funktionen

Zeichnen Sie folgende Funktionen und bestimmen Sie Nullstellen und Periode:

- |     |                                   |     |                 |
|-----|-----------------------------------|-----|-----------------|
| (a) | $2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ | (c) | $\cos(8\pi x)$  |
| (b) | $\sin(3x + \pi)$                  | (d) | $\tan(x + \pi)$ |

### Aufgabe 4: Exponentialfunktion und Logarithmus

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich:

- |     |  |     |  |
|-----|--|-----|--|
| (a) | $\ln(x^a) + \ln(x^b)$                  | (d) | $\ln(a^7) + \ln\left(\frac{1}{a^7}\right)$   |
| (b) | $\ln(a^x) + \ln(b^x)$                  | (e) | $\log_2(16)$                                 |
| (c) | $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^6}}\right)$ | (f) | $2 \ln(e^3) + \ln\left(\frac{1}{e^6}\right)$ |

### Aufgabe 5: Polynomfunktionen

Zeichnen Sie die folgenden Funktionen, bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich, die Nullstellen und das Symmetrieverhalten (Bonus: Versuchen Sie durch ableiten und andere geschickte Rechnungen, die Funktionen ohne einen Plotter zu zeichnen. Finden Sie gegebenenfalls die Symmetrieachse):

- |     |                                 |     |                                |
|-----|---------------------------------|-----|--------------------------------|
| (a) | $f(x) = x^2 + 2x + 1$           | (c) | $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)}$ |
| (b) | $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ |     |                                |

### Aufgabe 6: Polynomdivision

Führen Sie jeweils Polynomdivisionen so weit wie möglich durch:

(a) 
$$\frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{3 - x}$$

(b) 
$$\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1}$$

(c) 
$$\frac{3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

(d) 
$$\frac{x^5 + 4x^4 - 9x^3 - 40x^2 - 4x + 48}{x^3 - 13x + 12}$$