

Aufgabe 1: Folgenkonvergenz

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz/Divergenz und geben Sie bei Konvergenz den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty}$ an:

- | | | | |
|-----|---------------------------------|-----|--------------------------|
| (a) | $a_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$ | (d) | $a_n = -2^n$ |
| (b) | $a_n = (-1)^n$ | (e) | $a_n = e^{\frac{1}{n!}}$ |
| (c) | $a_n = \sin(n\pi)$ | (f) | $a_n = n^{-n}$ |

Aufgabe 2: Eigenschaften von Folgen

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Beschränkung, und Konvergenz:

- | | | | |
|-----|--------------------|-----|---|
| (a) | $a_n = 5$ | (c) | $a_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ |
| (b) | $a_n = \sqrt{n+1}$ | (d) | $a_n = 3^{-n} - 7^{-n}$ |

Aufgabe 3: Reihenkonvergenz

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- | | | | |
|-----|---|-----|------------------------------------|
| (a) | $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} k$ | (d) | Bonusaufgabe (Geometrische Reihe): |
| (b) | $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ | | $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ |
| (c) | $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ | | Zeigen Sie zunächst, dass |

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{mit } q \neq 1$$

Aufgabe 4: Additionstheoreme

Vereinfachen Sie folgende Gleichungen:

- | | | | |
|-----|---|-----|---|
| (a) | $\frac{\sin^4(x) - \cos^4(x)}{\sin^2(x) - \cos^2(x)}$ | (b) | $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ |
|-----|---|-----|---|

Aufgabe 5: Reihen

Nutzen Sie die Reihendarstellung von e^x sowie $\sin(x)$ und $\cos(x)$, um die Relation

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

zu beweisen.