Übungsblatt 12

Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Mathematischer Brückenkurs
Sommersemester 2024
Vorlesung: Prof. Dr. Sonia Bacca

Aufgabe 1: Skalar- und Vektorfelder

Welche der folgenden Beispiele sind Skalarfelder und welche sind Vektorfelder?
a) Luftdruck, b) Temperatur, c) Magnetfeld, d) Gravitationsfeld, e) Windgeschwindigkeitsfeld, f) Höhenfeld einer Landkarte, g) Steigungsfeld einer Landkarte

Aufgabe 2: Vektorwertige Funktionen

Die Kraft $\vec{K}$ auf einen beschleunigten Körper der Masse m ist nach dem 2. Newton'schen Gesetz $\vec{K} = m\,\ddot{\vec{r}}$. Berechnen Sie die zur Bahnkurve $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2$ gehörende Kraft.

Aufgabe 3: Gradient

a) Berechnen Sie den Gradienten folgender skalarer Funktionen, wobei die Werte $a, b, c \in \mathbb{R}$:
i) $\Phi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$ ii) $\Phi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$

b) Das Skalarfeld $h(x,y) = -x^2 - 2y^2 + 10$ ordnet jedem Punkt in der (x,y)-Ebene eine Höhe h zu und beschreibt damit in der Nähe des Punktes $(0|0)$ den Gipfel eines Berges. In welche Richtung in der Projektion auf die (x,y)-Ebene wäre der steilste Weg nach oben, wenn Sie am Punkt P(0,5|0) stehen und was ist die maximale Steigung an diesem Punkt? Wie verhält sich diese Richtung maximaler Steigung im Verhältnis zu den Höhenlinien des Berges?

Aufgabe 4: Gradient und Divergenz und Rotation von Vektorfeldern

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}$ ist definiert durch:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \mathrm{div}\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

und die Rotation eines Vektorfeldes durch:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \mathrm{div}\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie mit $\alpha(\vec{x}) \equiv xy^2z^3$ und $\vec{A}(\vec{x}) \equiv \begin{pmatrix} 2y^2z \\ xy \\ -z^2 \end{pmatrix}$:

(i) $\vec{\nabla}\alpha$ (ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ (iii) $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ (iv) $\vec{\nabla} \cdot (\alpha\vec{A})$ (v) $\vec{\nabla} \times (\alpha\vec{A})$