Johannes Gutenberg-Universität Mainz
**Mathematischer Brückenkurs**
**Sommersemester 2024**
Vorlesung: Prof. Dr. Sonia Bacca

# Übungsblatt 11
## Funktionen mehrerer Variablen

---

### Aufgabe 1: Partielle Ableitungen

Leiten Sie die folgenden Funktionen nach den jeweils angegebenen Variablen ab:

(a) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2+7xy+z\right)$$

(b) $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

(c) $$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+3xy^2+zy\right)$$

(d) $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\,\ln(x+y+z)$$

(e) $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\,\arctan\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right]$$

### Aufgabe 2: Laplace-Gleichung

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ die Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

für $(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)^T$ erfüllt.

### Aufgabe 3: Totale Ableitung

Gegeben sei die Funktion $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ mit $x=\rho\cos t$, $y=\rho\sin t$ mit $\rho\in\mathbb{R}$. Berechnen Sie die totale Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t),y(t))$ mit Hilfe der Kettenregel.

### Aufgabe 4: Gradient

Gegeben sei eine Funktion $f(x,y,y)$ (Skalarfeld). Der Gradienten(-vektor) von $f$ ist

$$\vec{\nabla}f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}$$

wobei $\vec{\nabla}\equiv\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$ Nabla-Operator genannt wird.

Berechnen Sie die Gradienten $\vec{\nabla}f$ für folgende Felder:

(a) $f(x,y,z)=x+y^2+z^2$

(b) $f(x,y,z)=e^xz^3-yzx^2$

(c) $f(x,y,z)=y^2\sin(x)-\sqrt{yzx^2}$

(d) $f(x,y,z)=-x^2-y^2+10$

### Bonus Aufgabe 5: Mehrfachintegrale

(a) $$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y\;3x^2y^3+2$$

(b) $$\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\;\sin(x)y^2$$

(c) $$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^3\mathrm{d}z\;x^2y-z^2x+3y^2z$$

(d) $$\int_0^{yz}\mathrm{d}x\int_0^{z^2}\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z\;(x^2-z^2+yz)$$