TEIL II ZAHLEN

NATÜRLICHEN ZAHLEN $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

AXIOMEN VON PEANO

P1) Die Zahl 0 ist eine natürliche Zahl.

P2) Falls n eine natürliche Zahl ist, so ist die nachfolgende Zahl $n+1$ ebenfalls eine natürliche Zahl

P3) Die natürlichen Zahlen sind die minimale Menge, welche die ersten beide Axiome erfüllt.

OPERATIONEN $a + b$ Addition, $a \cdot b$ Multiplikation } ASSOZIATIV, KOMMUTATIV, NEUTRALES ELEMENT

BEMERKUNG $a - b$ nicht unbedingt in $\mathbb{N}$

a/b " "

INDUKTIONSBEWEIS

$\Rightarrow f(n) = g(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ beweisen

1) INDUKTIONSANFANG: zeigen, dass die Behauptung für $n=1$ richtig ist

2) INDUKTIONSCHRITT: Behauptung richtig für $n-1$ annehmen und zeigen dass dann auch für n richtig ist.

$n = 1$ ✓

$n = 2$ ✓

$n = 3$ ✓

⋮

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$

BEISPIEL

$$* \quad \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) $n = 1$

$\sum_{j=1}^{1} j = 1$ linke Seite ✓

$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 1$ rechte Seite

2)

$$\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n-1} j + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2}$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{m} j}_{\substack{\text{Behauptung} \\ \text{für } m \\ \text{linke Seite}}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m-1} j}_{\substack{\text{Behauptung *} \\ \text{für } m-1 \\ \text{richtig}}} + m = \frac{(m-1)m}{2} + m = \frac{m^2 - m + 2m}{2}$$

$$= \frac{m^2+m}{2} = \underbrace{\frac{m(m+1)}{2}}_{\substack{\text{Behauptung für } m \\ \text{rechte Seite}}}$$

$$\sum_{j=1}^{m} j = \underbrace{1+2+3 \ldots + m-1}_{} + m \overset{!}{=} \sum_{j=1}^{m-1} j + m$$

DIE GANZE ZAHLEN $\mathbb{Z}$

$b-a$ hat nur eine Lösung in $\mathbb{N}$, wenn $a \leq b$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\ldots -3, -2, -1\} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

- Addition und Multiplikation setzen sich auf $\mathbb{Z}$ fort.
- Assoziativ, Kommutativ
- $\forall z \in \mathbb{Z}$ $\exists$ inverses $\underset{\notin \mathbb{N}}{(-z) \in \mathbb{Z}}$ damit $z + (-z) = 0$.

  $\mathbb{Z}$ ist eine Gruppe bezüglich der Addition

$\frac{b}{a}$ nicht unbedingt in $\mathbb{Z}$

DIE RATIONALEN ZAHLEN $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ r \;\middle|\; r = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

- Für $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ gilt $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \iff p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$

  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{\cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot 3}$

- Die Addition, Multiplikation setzen sich auf $\mathbb{Q}$ fort: assoziativ, kommutative, distributiv

BRUCHENRECHNEN

- ERWEITERN / KÜRZEN $\qquad \frac{\cancel{c} \cdot p_1}{\cancel{c} \cdot q_1} = \frac{p_1}{q_1}$
- MULTIPLIKATION $\qquad \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$
- DIVISION $\qquad \frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$

- ADDITION $\quad \dfrac{p_1}{q_1} + \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 q_2}$ $\quad$ Auf gemeinsamen Nenner bringen

- SUBTRAKTION $\quad \dfrac{p_1}{q_1} - \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_1 q_2 - p_2 \cdot q_1}{q_1 q_2}$

BEISPIELE :

ERWEITERN $\quad \dfrac{15}{9} = \dfrac{\cancel{3} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot 3} = \dfrac{5}{3}$

ADDITION $\quad \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \dfrac{9 + 10}{15} = \dfrac{19}{15}$

DIVISION $\quad \dfrac{2}{3} : \dfrac{5}{7} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \dfrac{14}{15}$

POTENZEN $\quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \; \ldots \; \cdot a}_{n\text{-mal}}$

RECHNEN MIT POTENZEN :

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

BEISPIELE :

$$2^7 \cdot 3^7 = (2 \cdot 3)^7 = 6^7$$

$$2^5 \cdot 2^7 = 2^{(5+7)} = 2^{12}$$

$$\left(3^2\right)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$$

QUIZ

$$\frac{x^{-1} \cdot x^3 \cdot x^5}{x^2 \cdot x^7} = \frac{x^{-1+3+5}}{x^{2+7}} = \frac{x^7}{x^9} = \frac{\cancel{x^7}}{\cancel{x^7} x^2} = \frac{1}{x^2}$$

A) 0

B) 1

C) x^2

D) $\dfrac{1}{x^2}$

BINOMISCHE FORMELN

$$\left.\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}\right\} \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 + \cancel{ba} - \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

DIE REELLEN ZAHLEN $\mathbb{R}$.

Manche Zahlen lassen sich nicht als Quotient zweier ganzen Zahlen darstellen: IRRATIONALE ZAHLEN $\mathbb{I}$ (unbegrenzte nichtperiodische Dezimalzahlen)

$1,23456\ldots$

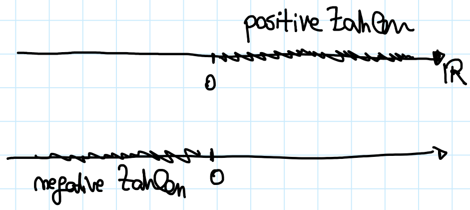
$x^2 = 2 \qquad x = \pm\sqrt{2} = \pm 1,41\ldots$

- Durch Erweiterung des $\mathbb{Q}$ Zahlbereichs auf alle unendlichen nichtperiodische Dezimalzahlen der Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$, erhalten wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

$$\pi = 3,14159 \in \mathbb{R}$$
$$e = 2,718281 \in \mathbb{R}$$

- Die Addition und Multiplikation setzen sich auf $\mathbb{R}$ fort.

- Die reelle Zahlen sind angeordnet $\qquad x > 0$



Axiomen

O1) Es gibt genau eine der Beziehungen
$x < 0$, $x = 0$, oder $x > 0$.

O2) Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x + y > 0$.

O3) Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x \cdot y > 0$.

Operatoren:
- POTENZIEREN mit ganzem Exponenten
- WURZELZIEHEN aus jeder positiven Zahl
- LOGARITHMUS mit beliebiger positiver Basis ($\neq 0$)

LOGARITHMUS Der Logarithmus zur Basis b ist definiert durch

Argument

$$x = \log_b a \iff b^x = a$$

Basis

LOGARITHMENGESETZE: $\quad \log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$

LOGARITHMEN GESETZE:

$$\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$
$$\log_b(a/c) = \log_b a - \log_b c$$
$$\log_b a^c = c \log_b a$$
$$\log_b c = \frac{1}{\log_c b}$$

WICHTIGEN LOGARITHMEN

$\log_e x = \ln x$ Natürlicher Logarithmus

$\log_{10} x \stackrel{?}{=} \log x \stackrel{?}{=} \lg x$ Basis 10

LINEAREN GLEICHUNGEN:

$ax + b = 0$ wobei $a \neq 0$ LINEARE GLEICHUNG

$x = -\frac{b}{a}$ Lösung

QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

$ax^2 + bx + c = 0$ wobei $a \neq 0$ QUADRATISCHE GLEICHUNG

$$x_{1/2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

wobei $D = b^2 - 4ac \geq 0$ DISKRIMINANTE

KOMPLEXE ZAHLEN $\mathbb{C}$

$x^2 = 2$ $\quad x = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

$x^2 = -2 \Rightarrow x^2 + 2 = 0$ $\quad D = -4 \cdot 2 = -8 < 0$

$a = 1;\ b = 0,\ c = 2$

Keine reelle Lösung

Def: Man definiert die Imaginäre Einheit i als eine Lösung der Gleichung

$$i^2 = -1$$

KOMPLEXE ZAHLEN $\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$z \in \mathbb{C}$ $\quad z = x + iy$ Komplexe Zahl

$x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}\{z\}$ REALTEIL

$y = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\{z\}$ IMAGINÄRTEIL

Beispiel $\quad z = 3+5i \qquad \operatorname{Re} z = 3$

$\operatorname{Im} z = 5$

KONJUGATION $\quad$ Die zu $z = x+iy$ konjugierte komplexe Zahl is

$$z^* = x - iy$$

Beispiel $\quad z = 3+5i \qquad z^* = 3-5i$

ADDITION & MULTIPLIKATION : $\quad z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = \underline{(x_1 x_2 - y_1 y_2)} + i\,\underline{(x_1 y_2 + y_1 x_2)}$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + i(x_1 y_2 + iy_1 y_2)$$

$$= x_1 x_2 + iy_1 x_2 + i x_1 y_2 + i^2 y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 + \underline{iy_1 x_2} + \underline{i x_1 y_2} - y_1 y_2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

$$= \underline{(x_1 x_2 - y_1 y_2)} + i\,\underline{(x_1 y_2 + y_1 x_2)}$$

BEISPIELE

$(1+2i) + (3+4i) = 4 + i6$

$(1+2i) \cdot (3+4i) = -5 + 10i$