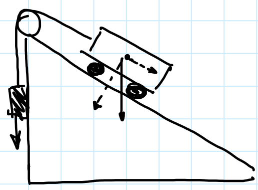
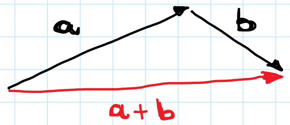
TEIL IV : VEKTOREN

MOTIVATIONEN

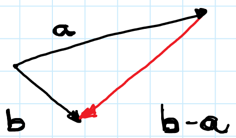
- Viele physikalische Grössen haben neben einem Betrag auch eine räumliche Richtung ⇒ VEKTOREN



- Pfeile deren Länge dem Betrag der Grösse entspricht
- NOTATION : $\mathbf{a}$, $\bar{a}$, $\vec{a}$, $\mathfrak{a}$



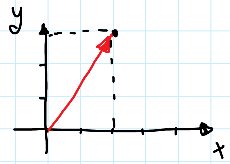
SUMME



DIFFERENZ

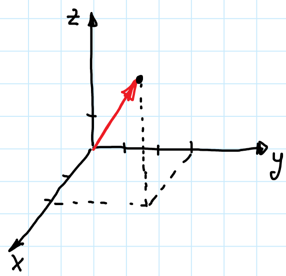
BEISPIELE

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



KARTESISCHE KOORDINATEN

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Erweitern auf höheren Dimensionen

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

VEKTORRÄUME

Sei V eine Menge und sei $(V,+)$ eine kommutative Gruppe, wobei

$+ : V \times V \longrightarrow V$ SUMME "ABBILDUNG"

$\downarrow$

$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$

Darauf nehmen wir auch eine andere Abbildung

$\cdot : K \times V \longrightarrow V \qquad K \in \mathbb{R}$

$k \cdot v \in V$ SKALARE MULTIPLIKATION

$(V, +, \cdot)$ ist ein VEKTORRAUM, wenn folgenden Axiome gelten:

- DISTRIBUTIVGESETZE $\qquad k \cdot (v_1 + v_2) = (k \cdot v_1) + (k \cdot v_2)$

  $(k_1 + k_2) \cdot v = (k_1 \cdot v) + (k_2 \cdot v)$
- ASSOZIATIVGESETZ $\qquad k_1 \cdot (k_2 \cdot v) = (k_1 \cdot k_2) \cdot v$
- Für die Eins $\qquad 1 \cdot v = v$

TRANSPOSITION $\qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ Spalte $\qquad \cancel{v = (x, y, z)}$

↳ Spaltenvektor → Zeilenvektor
Zeilenvektor → Spaltenvektor

v^T Reihe

$$(x_1, x_2, \ldots x_m)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}^T = (x_1, x_2, \ldots x_m)$$

BEISPIELE

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (1, 2, 3)$$

QUIZ: $\qquad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$2 v_1 + 3 v_2 = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

A) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\boxed{D) \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}}$

EINHEITSVEKTOREN

Def: Vektoren, die in fast allen Komponenten eine Null haben, bis auf eine Komponente, in der sie eine Eins haben

$e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)^T$ $\qquad$ i-te Einheitsvektor

$$\mathbf{e}_i = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i-1}, \underset{i}{1}, 0, \dots 0)^T \quad \text{i-te Einheitsvektor}$$

$\mathbb{R}^2$ $\quad \mathbf{e}_1 = (1,0)^T \quad \mathbf{e}_2 = (0,1)^T$

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT

Seien m Vektoren $v_1, v_2 \dots v_m$ gegeben. Folgt aus $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = 0$, so nennt man die Vektoren linear unabhängig.

Andersfalls nennt man sie linear abhängig $\quad a_1 e_1 + a_2 e_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ und $a_2 = 0$

BASIS UND DIMENSION

Def. Sei V ein Vektorraum. Die maximale Anzahl linearer unabhängiger Vektoren im V nennt man die DIMENSION DES VEKTORRAUMES.

Def. Eine Menge linearer unabhängiger Vektoren, die maximal ist, nennt man eine BASIS von V.

BEISPIEL $\quad \mathbb{R}^m \quad \dim = m \quad$ Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_m\}$ STANDARD BASIS

$\mathbb{R}^3 \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ STANDARD BASIS im $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^4 \quad \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ " " $\mathbb{R}^4$

EUKLIDISCHES SKALARPRODUKT

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Die Komponentendarstellung bei unsere Standardbasis

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ EUKLIDISCHE SKALARPRODUKT

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_m y_m$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

$\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots y_m x_m$

EIGENSCHAFTEN
- LINEAR IN DER ERSTE KOMPONENTE $\quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \quad (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$
- " " ZWEITE KOMPONENTE $\quad \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \quad \mathbf{x} \cdot (\lambda \cdot \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$
- SYMMETRISCH $\quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- POSITIV DEFINIERT $\quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ falls $\mathbf{x} \neq 0$

Ein reeller Vektorraum mit einem euklidischen Skalarprodukt bezeichnet man als <u>euklidischen Vektorraum</u>.

BEISPIEL

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 1\cdot4 + 2\cdot5 + 3\cdot6 = 4+10+18=32$$

Zurück 10:50

Formel von Moivre $\qquad z^n = |z|^n\left(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right) \qquad n\in\mathbb{Z}$

Erweiterung $\frac{1}{n}$

QUIZ

$$\begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix} = 7\cdot2 + 3(-5)+1\cdot3 = 14-15+3 = 2$$

A) 1   B) 2   C) 32   D) 42

BETRAG EINES VEKTORS

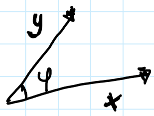
Def. $\qquad |x| = \sqrt{x\cdot x}$ $\qquad$ Länge oder Betrag von x

Betrag $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = ?$

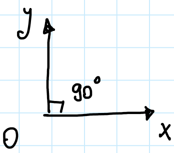
$$\sqrt{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}} = \sqrt{1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

Sei $x,y\in\mathbb{R}^n$. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist gegeben durch

$\Rightarrow \quad x\cdot y = |x||y|\cos\varphi$

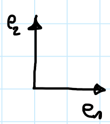


$$\cos\varphi = \frac{x\cdot y}{|x||y|} \longrightarrow \boxed{\varphi = \arccos\frac{x\cdot y}{|x||y|}}$$



Zwei Vektoren stehen SENKRECHT aufeinander, falls $x\cdot y = 0$ $\qquad \cos 90^\circ = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\mathbb{R}^2$



$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad e_1\cdot e_2 = 1\cdot0+0\cdot1 = 0$$

DAS KREUZPRODUKT (ODER VEKTORPRODUKT)

<u>Def</u>: Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Im einem dreidimensionalen Vektorraum ist zusätzlich das Kreuzprodukt als die Abbildung

$$V\times V \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$$

definiert.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2y_3-y_2x_3\\-(x_1y_3-y_1x_3)\\x_1y_2-y_1x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\y_1x_3-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$$

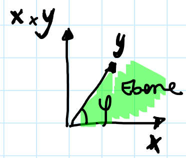
Existiert nur in drei Dimensionen!

<u>BEISPIEL</u>

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 6 - 3\cdot 5\\ 3\cdot 4 - 1\cdot 6\\ 1\cdot 5 - 2\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

EIGENSCHAFTEN DES KREUZPRODUKT

- Das Kreuzprodukt ist anti-symmetrisch $\quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$
- Der Vektor $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ steht senkrecht auf $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ $\quad \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$, $\quad \mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$



- Für den Betrag von $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ gilt $\Rightarrow |\mathbf{x} \times \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cdot \sin \varphi$

ANTISYMMETRISCHER TENSOR

Sei $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$

$$\boxed{z_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, x_j \, y_k}$$

$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} \rightsquigarrow z_i$ allgemeine Komponente

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \rightsquigarrow x_j$ allgem. Komponente

$\mathbf{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \rightsquigarrow y_k$ allgemeine Komponente

ε_{ijk} LEVI-CIVITA TENSOR

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i,j,k) \text{ eine \underline{gerade} Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \text{ ein \underline{ungerade} Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

PERMUTATION Eine Permutation $(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$ nennt man GERADE, wenn man sie durch eine GERADE Anzahl von paarweisen Vertauschungen aus $(1, 2, \dots, n)$ erzeugen kann.
Benötigt man eine UNGERADE Anzahl von Vertauschungen, so nennt man die Permutation ungerade.

$(3, 2, 1, 5, 4) \to (1, 2, 3, 5, 4) \longrightarrow (1, 2, 3, 4, 5)$

$(1, 5, 3, 4, 2) \longrightarrow (1, 2, 3, 4, 5)$

QUIZ: $\quad \varepsilon_{132} = -1$

A) -1
B) 0
C) 1
D) 6

KRONEKER DELTA

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$