TAYLOR + L'HOPITAL

TAYLOR ENTWICKLUNG

Motivationen

- Reihendarstellung von Funktionen e^x, $\cos x$, $\sin x$
- systematische Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

THEOREM (TAYLORSCHE FORMEL)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion.
Dann gilt für $x_0 \in I$ und $x \in I$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + \underbrace{R_{n+1}(x)}_{\text{Restglied}}.}$$

Für das Restglied gilt: $\exists\, \xi$ zwischen x_0 und x
(d.h. $\xi \in [x_0, x]$ für $x > x_0$ oder $\xi \in [x, x_0]$ für $x < x_0$)
so dass
$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

BEMERKUNG: Das ist eine Existenzaussage über ξ, im allgemeinen schwer zu bestimmen

BEISPIEL 1) $f(x) = \cos(x)$ $\qquad x_0 = 0$

$f'(x) = -\sin(x)$

$f''(x) = -\cos(x)$

$f'''(x) = \sin(x)$

$f^{(4)}(x) = \cos(x)$

Taylor Entwicklung im $x_0 = 0$

$$f(x) = \cos(0) - \cancel{\frac{\sin(0)}{1!}(x-0)} - \frac{\cos(0)}{2!}(x-0)^2 + \cancel{\frac{\sin(0)}{3!}(x-0)^3} + \frac{\cos(0)}{4!}(x-0)^4 + \dots$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)$$

2) $f(x) = \cos(x e^x) + \sin(x^2 e^{-x})$

Taylorentwicklung um $x_0 = 0$

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - 2x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ordnung}}}{\mathcal{O}(x^5)}$$

Ordnung : Potenzen mit Grad 5 oder höher

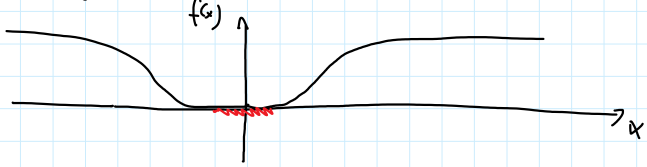
TAYLORREIHEN

Sei nun $f: I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$.
Wir definieren die Taylorreihe der Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0:

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

BEMERKUNG: Falls die Taylorreihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$x_0 = 0 \qquad f^{(n)}(0) = 0 \qquad$ Taylorreihe ist eine Reihe von 0

$x_0 = 0$ $\quad f^{(n)}(0) = 0$ $\quad$ Taylorreihe ist eine Reihe von 0

Die Regeln von L'Hospital

Unbestimmten Formen von Grenzen $\frac{0}{0}, \pm\frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \ldots$

Die erste Regel von L'Hopital

Theorem: Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ zwei im $x_0 \in D$ stetige Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Weiter seien f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar. Existiert $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so gilt

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{1-1}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

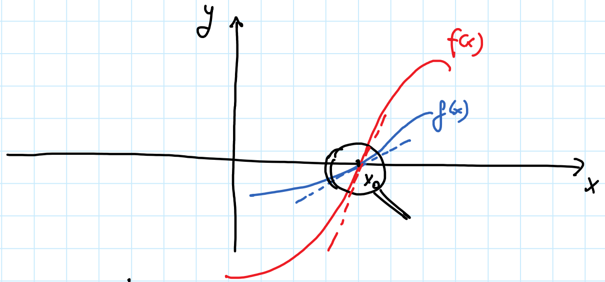
$$\overset{\text{d.l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{d.l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Anschauliche Erklärung

Tangente $f_T(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

Tangente $g_T(x) = g'(x_0)(x-x_0) + g(x_0)$

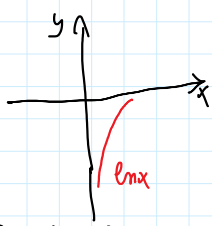


$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f_T(x)}{g_T(x)} = \frac{f'(x_0)(x-x_0) + \cancel{f(x_0)}}{g'(x_0)(x-x_0) + \cancel{g(x_0)}} = \frac{f'(x_0)\cancel{(x-x_0)}}{g'(x_0)\cancel{(x-x_0)}} \approx \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die zweite Regel von L'Hopital

Theorem: Ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ und existiert $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

dann gilt ebenfalls $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$



Beispiel

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$$

$$\overset{\text{d.l'H (2)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(-x^{\cancel{2}}\right) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Quiz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-4}{x^2+6x+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

A) 0 $\quad$ B) $\frac{1}{2}$ $\quad$ C) $\frac{3}{2}$ $\quad$ D) 3

$$\overset{\text{d.l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2x+6} = 0$$

QUIZ : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^3+5x^2-3x-1}{x^3-20x^2+x+10} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$ A) 0 B) $-\frac{1}{10}$ C) 7 D) 21

QUIZ : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \underset{\text{de l'H}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{1} = \infty$ A) 0 B) ∞ C) $-\infty$ D) 1

QUIZ : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ A) 0 B) ∞ C) 5 D) 4

$$\underset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}\cdot 2 - e^{-2x}(-2)}{\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{\cos x} = \frac{2\cdot 1+2\cdot 1}{1} = 4$$

QUIZ : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x \cdot x^2 = [-\infty \cdot 0]$ A) 1 B) $-\infty$ C) $+\infty$ D) 0

$$\| $$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} \underset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2\cdot\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cancel{x}}\left(x^{\cancel{3}\,2}\right)\frac{1}{-2} = 0$$