TEIL VI: MATRIZEN

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (n \times m) \text{ Matrix}$$

- Addition von $(n \times m)$ Matrizen
- Multiplikation mit Skalaren λ
- Mit dieser Addition und dieser skalaren Multiplikation bilden die $(n \times m)$ Matrizen einen <u>VEKTORRAUM</u> mit Dimension $n \cdot m$
- <u>BASIS</u>

$$e_{ij} = \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-te Zeile} \leftarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \dots & 0 \dots & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 \quad 0 \dots & 0 \\ 0 \dots & \dots & 0 \\ 0 \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \; j\text{-te Spalte}$$

MULTIPLIKATION

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}}_{A}_{n \times k} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \end{pmatrix}}_{B}_{k \times m} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & & c_{33}\; c_{ij} & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}}_{C}_{n \times m}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj}$$

Regel: Zeile · Spalte

BEISPIEL

$$\underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}} = \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 164 \end{pmatrix}$$

QUIZ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$

D) 17

QUIZ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}_{1\times 2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \end{pmatrix}_{1\times 1} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \end{pmatrix}$

D) 11

SPALTENVEKTOREN UND ZEILENVEKTOREN $\longrightarrow$ MATRIZEN

- m-dimensionaler Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m\times 1}$

- m-dimensionaler Zeilenvektor $\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1m} \end{pmatrix}_{1\times m}$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mm} x_m = b_m \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}_{m\times m} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{m\times 1} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{A\cdot\mathbf{x}} = \underset{m\times 1}{\mathbf{b}} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

QUADRATISCHE MATRIZEN

$m \times m$ Matrix $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix} \quad a_{ij} \quad i = 1 \dots m$

$m \times m$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

a_{ij} $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots m$

a_{ii} $i = j$ m-Möglichkeiten

SPUR (Trace) $\mathrm{Tr}\,A = \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{mm}$

RECHENREGELN A, B $(m \times m)$ Matrizen λ skalar $(\in \mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B}$$

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots \\ \vdots & a_{22}+b_{22} & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mm}+b_{mm} \end{pmatrix}$$

$= a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22} + \dots a_{mm}+b_{mm}$

$= (a_{11}+a_{22}+\dots a_{mm}) + (b_{11}+b_{22}+\dots b_{mm})$

$= \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\lambda \cdot A) = \lambda\,\mathrm{Tr}\,A}$$

BEISPIEL

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = 1+6+11+16 = 34$$

QUIZ

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) 6 D) 45

DETERMINANTE Quadratische Matrizen

(1×1)-Matrix a_{11} $\det(a_{11}) = a_{11}$

(2×2)-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$(m \times m)$ Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad \det A = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \dots \sum_{i_m=1}^{m} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m}\, a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdot \dots \cdot a_{m i_m}$$

$\{ +1$ für $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ gerade Permutation von $(1, 2, \dots, m)$

$$\begin{vmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i_1, i_2, \ldots, i_m) \text{ gerade Permutation von } (1,2,\ldots,m) \\ -1 & \text{für } (i_1, i_2, \ldots, i_m) \text{ ungerade Permutation von } (1,2,\ldots m) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fall 2×2

$$\det A = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \varepsilon_{i_1 i_2} \, a_{1 i_1} \cdot a_{2 i_2}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{2} \underbrace{\varepsilon_{i_1 1} \, a_{1 i_1} \cdot a_{21}} + \underbrace{\varepsilon_{i_1 2} \, a_{1 i_1} \cdot a_{22}}$$

$$= \underset{=0}{\varepsilon_{11}} a_{11} a_{21} + \underset{=-1}{\varepsilon_{21}} a_{12} a_{21} + \underset{=+1}{\varepsilon_{12}} a_{11} a_{22} + \underset{=0}{\varepsilon_{22}} a_{12} a_{22}$$

$$= - a_{12} a_{21} + a_{11} a_{22} = a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Notation
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Diagonalmatrix
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$\det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \lambda_m$$

BERECHNUNG DER DETERMINANTE

$(m \times m)$ Matrix A

$(m-1) \times (m-1)$ - Matrix A_{ij} $\rightarrow$ entsteht wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte der Matrix A entfernt

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mm} \end{pmatrix}_{m \times m} \quad \begin{array}{c} j\text{-te Spalte} \end{array}$$

Wegnehmen

- Entwicklung nach der i-ten Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, \det A_{ij}$$

- Entwicklung nach der j-te Spalte

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, \det A_{ij}$$

BEISPIEL

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

BEISPIEL

$$\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&0&3&0\\4&5&6&7\\8&9&10&11\end{pmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\det\begin{pmatrix}0&3&0\\5&6&7\\9&10&11\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0&3&0\\5&6&7\\9&10&11\end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\,3\cdot\det\begin{pmatrix}5&7\\9&11\end{pmatrix} =$$

$$= -3\cdot\det\begin{pmatrix}5&7\\9&11\end{pmatrix} = -3\,(5\cdot 11 - 7\cdot 9) = 24$$

Rechenregeln für die Determinante:

A, B $(m\times m)$-Matrizen, λ Skalar

$$\det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B)$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^m \det A$$

$$A = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4-6 = -2$$

$$\lambda = 2 \qquad \underset{2\cdot A}{\lambda\cdot A \overset{}{\scriptstyle \parallel}} = \begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix} \qquad \det(2A) = \det\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix} = 2\cdot 8 - 4\cdot 6 = 16-24 = -8$$

$$\lambda^m \det A = 2^2\cdot\det A = 4\cdot(-2) = -8$$

QUIZ

$$\det\begin{pmatrix}1&0&0&42\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix} = 4\cdot\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} = 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 24$$

A) 0 B) 10 C) 24 D) −228

A, B $m\times m$-Matrizen

$A\cdot B$ auch $m\times m$ Matrix Multiplikation abgeschlossen

Neutrales Element bezüglich die Matrizenmultiplikation

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\ \vdots&1&&\\ \vdots&&\ddots&\\ 0&\cdots&&1\end{pmatrix}_{m\times m} \qquad \text{Einheitsmatrix}$$

$$\mathbb{1}\cdot A = A\cdot\mathbb{1} = A$$

DIE INVERSE MATRIX A^{-1}

$$A\cdot A^{-1} = \mathbb{1} \qquad \text{was } A^{-1}?$$

$$\det(A\cdot A^{-1}) = \det\mathbb{1} = 1$$

$$(\det A)(\det A^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$ wenn $\det A \neq 0$ Notwendige Bedingung für die Existenz eines Inversen

Auch hinreichende Bedingung

$n \times n$-Matrizen mit $\det A \neq 0$ ist eine Gruppe

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \mathbb{1} \qquad X = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \text{j-te Spalte} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots 1 & \\ & & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

j-te Spalte
$$\begin{cases} a_{11} x_{1j} + a_{12} x_{2j} + \cdots + a_{1n} x_{nj} = 0 \\ \cdots \qquad = 0 \\ a_{j1} x_{1j} + a_{j2} x_{2j} + \cdots + a_{jn} x_{nj} = 1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_{1j} + a_{n2} x_{2j} + \cdots + a_{nn} x_{nj} = 0 \end{cases}$$

LGS

n-Unbekannten $x_{1j}, x_{2j} \cdots x_{nj}$

$$\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}}_{n \times n} \left| \underbrace{\begin{array}{c} \text{j-te Spalte} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & \boxed{\,} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 1 \end{matrix} \end{array}}_{n \times n \text{ Einheitsmatrix}} \right.$$

Gauß'sche Eliminationsmethode

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{matrix} \right. \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

BEISPIEL $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right.$$ Add. $(-2) \cdot 1^{\prime}$ Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Add $(-1) \cdot 2^a$ Zeile

Add. $(-1) \cdot 2^a$ Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Mal $\frac{1}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Add $-2 \cdot 3^a$ Zeile

Add (-1) 3^a Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$