LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME (LGS)

MOTIVATIONEN

- LGS treten oft in den Naturwissenschaften auf.
- Viele Problemestellungen lassen sich auf LGS zurückführen
- LGS sind systematisch lösbar (Gauß'sche Eliminationsalgorithmus)

Def: LGS

Unter einem linearen Gleichungsystem versteht man n Gleichungen mit m Unbekannten $x_1, x_2 \dots x_m$ der Form

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nm} x_m = b_n \end{cases}$$

$a_{ij} \longrightarrow$ Koeffizienten $\quad b_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Jede Variable kommt linear vor und jeder Summand auf der linken Seite enthält nur eine Variable.

BEISPIEL

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 36 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 29 \\ \quad x_2 + 4x_3 = 14 \end{cases} \quad \text{LGS}$$

$$\begin{cases} 3x_1^5 + 3x_2 + 9x_3 = 36 \\ x_1 + x_1 \cdot x_2 + 4x_3 = 14 \\ \sin(x_1) + 7x_3 = 29 \end{cases} \quad \cancel{\text{LGS}}$$

BEOBACHTUNGEN

1)
$$\begin{matrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m = b_2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m = b_2 \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m = b_1 \end{matrix}$$

Wir dürfen Zeilen vertauschen

2)
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m = b_1 \iff c a_{11} x_1 + c a_{12} x_2 + \dots + c a_{1m} x_m = c b_1 \qquad c \neq 0$$

Wir dürfen mit einer konstanten Zahl $c \neq 0$ multiplizieren

3)
$$\begin{matrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m = b_2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} (a_{11} + a_{21}) x_1 + (a_{12} + a_{22}) x_2 + \dots + (a_{1m} + a_{2m}) b_m = b_1 + b_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m = b_2 \end{matrix}$$

Wir dürfen eine Zeile durch die Summe dieser Zeile mit einer anderen Zeile ersetzen.

NOTATION

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nm} x_m = b_n \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Dies ist ausreichend, da alle Umformungen nur auf die Koeffizienten a_{ij} und b_i wirken.

DER GAUß'SCHE ELIMINATIONSALGORITHMUS

DER GAUß'SCHE ELIMINATIONSALGORITHMUS

① Setze $i=1$ (Zeileindex $\rightsquigarrow m$), $j=1$ (Spaltenindex $\rightsquigarrow n$)

② Falls $a_{ij} = 0$ suche $k > i$, so dass $a_{kj} \neq 0$ und vertausche Zeile i und k.

③ Falls ein solches k aus ② nicht gefunden wird, setze $j \to j+1$

④ Falls man im Schritt ③ den Wert $j = n+1$ erreicht, beende den Algorithmus, andernfalls gehe zu ②

⑤ Multipliziere Zeile i mit $1/a_{ij}$

⑥ Für alle Zeilen $k \neq i$ addieren zur Zeile k das $(-a_{kj})$-fache der i-ten Zeile.

⑦ $i \to i+1$ $\quad j \to j+1$

⑧ Falls im ⑦ den Wert $i = m+1$ oder $j = n+1$ beende den Algorithmus, anderfalls gehe zu ②

BEISPIEL

$$3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 36$$
$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 29$$
$$x_2 + 4x_3 = 14$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 36 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right)$$

Multipliziere mit $\frac{1}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right)$$

Addiere das (-2) fache der 1. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right)$$

Addiere das (-1)-fache der 2. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right)$$

Addiere das (-1)-fache der 2. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Multipliziere mit $\frac{1}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Addieren das (-2)-fache der 3. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Addiere das (-1)-fache der 3. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3. \end{array}$$

Allgemeine Form nach dem Gauß'schen Eliminationsalgorithmus

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(r+1)} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(r+1)} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r(r+1)} & \dots & a_{rm} & b_r \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & & \dots & & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \end{array}\right)$$

r - Gleichungen, die nicht 0 sind

n Gleichungen
m Unbekannten

r Rang (rank)

1) Keine Lösung
2) Eine eindeutige Lösung
3) Mehrere Lösungen

1) Keine Lösung $b_{r+1} \dots b_n$ ungleich Null sind $r < n$

2) Eine eindeutige Lösung $r = m$ $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ \hline \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r = n = m$ $\{b_{r+1}, \dots, b_n\} = \emptyset$

3) Mehrere Lösungen

$r < m$ und $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(r+1)} & \dots \; a_{1m} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(r+1)} & \dots \; a_{2m} & b_2 \\ & \dots & & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r(r+1)} & \dots \; a_{rm} & b_r \\ & \dots & & & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Spezialfall $r = n$ $(n < m)$ wo $\{b_{r+1}, \dots b_n\} = \emptyset$

<u>Beispiel</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$n = 4$
$m = 4$
$r = 2$

Keine Lösung $0 = 3$ kann nicht sein

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT VON VEKTOREN

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots, \mathbf{v}_m$ linear unabhängig

$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = 0 \implies (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m) = (0, 0, \dots 0)$

LGS wo $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ unbekannt sind

Vektoren in n-Dimensionen

$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix}$ n-Komponenten

Beispiel $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 7\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{LGS}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der } 1^\wedge \text{ Zeile} \\ \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der } 1^\wedge \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der } 2^\wedge \text{ Zeile} \\ \\ \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der } 2^\wedge \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{array}$$

Mehrere Lösungen

$$\begin{cases} \lambda_1 = -5t \\ \lambda_2 = 3t \\ \lambda_3 = t \end{cases} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

$\implies$ nicht linear unabhängig, sondern linear abhängig.

$\mathbb{R}^3$ $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 0 \qquad \text{linear unabhängig.}$$
$$\lambda_3 = 0$$

MATRIZEN

Definition: Eine rechteckige Anordnung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Von Elementen a_{ij} nennt man Matrix.

Die Elementen a_{ij} nennt man die Komponenten der Matrix.

Eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten bezeichnet man als $(n \times m)$-Matrix

- Eine Matrix bezeichnet man als quadratisch, falls $n = m$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{n\text{-Dim}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$
- Eine Matrix bezeichnet man als EINHEITSMATRIX, falls quadratisch und $a_{ij} = \delta_{ij}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{n\text{-Dim}} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$
- Eine Matrix bezeichnet man als DIAGONALMATRIX, falls quadratisch und $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{n\text{-Dim}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix}$
- Eine Matrix bezeichnet man als obere DREIECKSMATRIX, falls quadratisch und $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{n\text{-Dim}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

ADDITION VON MATRIZEN

$(n \times m)$-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ & \dots & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

BEISPIEL

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix}_{2\times3} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

MULTIPLIKATION MIT SKALAREN

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ & \dots & & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

BEISPIEL

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$