KOMPLEXE ZAHLEN

QUIZ 1:

Sei $z_1 = 7 + 13i$ und $z_2 = 2 - 5i$

$$z_1 + z_2 = 9 + 8i$$

A) $17i$

$\boxed{\text{B) } 9+8i}$

C) $9+18i$

D) $5-18i$

QUIZ 2:

Sei $z_1 = 5 + 9i$ und $z_2 = 2i$

$$z_1 \cdot z_2 = (5+9i)\cdot 2i = 10i + 18i^2 = 10i - 18 = -18 + 10i$$

A) $10+18i$

B) $10-18i$

$\boxed{\text{C) } -18+10i}$

D) $18+10i$

SUBTRAKTION:

$z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2$$
$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

DIVISION:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$x_2 - iy_2$ → Konjugierte

$$= \frac{x_1 \cdot x_2 + iy_1 x_2 - i x_1 y_2 - \overset{-1}{i^2} y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \underbrace{\frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}}_{X} + i\underbrace{\frac{(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}}_{Y} = X + iY$$

$$(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2) =$$
$$= x_2^2 + \cancel{iy_2 x_2} - \cancel{ix_2 y_2} - (iy_2)(iy_2)$$
$$= x_2^2 - i^2 y_2^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$z = x + iy \qquad \operatorname{Im}\{z\} = y = 0 \qquad z = x$

$z = x + iy \qquad \operatorname{Re}\{z\} = x = 0 \qquad z = iy$ Reine Immaginär

BEISPIELE

$$(1+2i) - (3+4i) = -2 - 2i$$

$$\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)}{(3+4i)} \cdot \underbrace{\frac{(3-4i)}{(3-4i)}}_{1} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3+6i-4i-8\overset{-1}{i^2}}{9+16} =$$

$$= \frac{3+8+2i}{25}$$

$$= \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$$

QUIZ: Sei $z_1 = 6+8i$ und $z_2 = 2i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6+8i}{2i} \cdot \frac{\cancel{+}2i}{\cancel{+}2i} = \frac{12i + 16i^2}{4i^2} = \frac{12i - 16}{-4}$$

$$= \frac{-16}{-4} + i\frac{12}{-4}$$

$$= 4 - i3$$

A) 10

B) $3 + 4i$

$\boxed{\text{C) } 4 - 3i}$

D) $4 + 3i$

POLYNOME

Def: Ein Polynom von Grad n ist ein Audruck der Form

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \qquad \text{wobei} \quad x^0 = 1 \qquad n = \text{Grad des Polynoms}$$

c_i ↓ Koeffizienten; x^i → Potenzen

$\underset{c_1}{a}x + \underset{c_0}{b} \; (=0)$

$\underset{c_2}{a}x^2 + \underset{c_1}{b}x + \underset{c_0}{c} \; (=0)$

- Die Summe und das Produkt zweier Polynome sind wiederum Polynome
- Eine algebraische Gleichung mit Grad n ist eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} c_i X^i = 0$$

- Diese Variable x kann reel aber auch komplex sein (z).

NULLSTELLEN EINES POLYNOMS

Theorem:

Es seien $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Gleichung

$$c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + c_1 \cdot z + c_0 = 0$$

$$z \in \mathbb{C}$$

Diese Gleichung hat für die unbekannte Variable z genau n Lösungen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

$\Longleftrightarrow$ Ein Polynom n-ten Grades hat im $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

BEISPIEL

$$(z-4)\cdot(z-5)^2 = 0 \quad \Rightarrow \text{Grad } 3 \Rightarrow 3 \text{ Nullstellen}$$

$(z-4) = 0 \Rightarrow \boxed{z = 4}$ ist eine Nullstelle mit Vielfachheit 1

$(z-5)^2 = 0$

$\parallel$

$(z-5)(z-5) = 0 \Rightarrow \boxed{z = 5}$ ist eine Nullstelle mit Vielfachheit 2

BEISPIEL

$$\underset{a}{2}z^2 \underset{b}{-8}z + \underset{c}{26} = 0 \longrightarrow 2x^2 - 8x + 26 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Tot = 3

$D = b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 2 \cdot 26 = -144$ Negativ $\Rightarrow \nexists$ keine Lösung im $\mathbb{R}$

$$z_{1/2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{\underbrace{b^2 - 4ac}_{D}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{-144}\right) = \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{\underbrace{(-1)}_{=i^2} \cdot 12^2}\right) = \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{i^2 12^2}\right) = \frac{8}{4} \pm \frac{i12}{4} = 2 \pm 3i$$

10:45 Zurück

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z^* \dots \end{cases} \Rightarrow z + z^* = x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy} = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z^* = x - iy \end{cases} \Longrightarrow \quad z + z^* = x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy} = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

RECHENREGELN MIT KONJUGATION

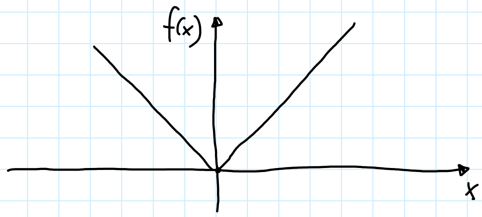
$$(z^*)^* = z$$

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*) \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$
$$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$$
$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

BETRAG EINER REELLEN ZAHL

$$x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$



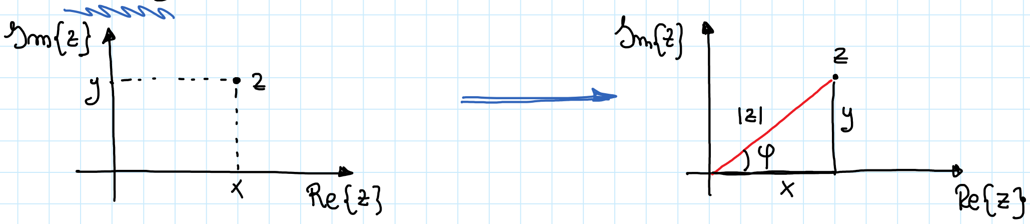
BETRAG EINER KOMPLEXEN ZAHL

$$z = x + iy$$
$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$$
$$|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

BEISPIEL $\quad |3 + 5i| = \sqrt{(3+5i)(3-5i)} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

DIE KOMPLEXE ZAHLEN EBENE

$z = x + iy \rightsquigarrow (x, y)$ Paar



$\mathbb{C}$ Zahlen die $\mathrm{Im}\{z\} = 0 \xrightarrow{\mathbb{R}}$ $\qquad z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ POLARDARSTELLUNG

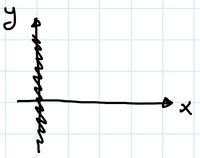
$$\begin{cases} x = |z| \cos\varphi \\ y = |z| \sin\varphi \end{cases}$$

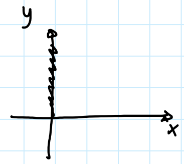
$(x,y) \Longleftrightarrow (|z|, \varphi)$

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

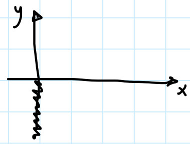
$\tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad x \neq 0 \Longrightarrow \boxed{\varphi = \arctan \frac{y}{x}}$

$x = 0$





Phase $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (90°) wenn $x=0$, $y>0$



Phase $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ (270°) wenn $x=0$, $y<0$

MULTIPLIKATION UND DIVISION IN POLARFORM

$z_1 = x_1 - i y_1 \qquad z_2 = x_2 + i y_2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

Polar $\quad z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

Formel sind einfacher

Beweis $\quad z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$= |z_1||z_2|\left[\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \underbrace{i^2}_{=-1}\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2\right]$

$= |z_1||z_2|\left[(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right]$

$= |z_1||z_2|\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$

DIE FORMEL VON MOIVRE

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

Fall $z_1 = z_2 = z \longrightarrow z^2 = |z|^2\left[\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)\right]$

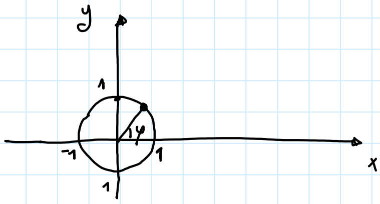
Generalizieren

$$\boxed{z^m = |z|^m\left[\cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)\right]}$$

DIE FORMEL VON EULER

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$$ EXPONENTIAL DARSTELLUNG

Komplexe Zahl $\leftarrow e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$



Betrag $z z^* = |z|^2$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) \stackrel{!}{=} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = e^{(i\varphi - i\varphi)} = e^0 = 1$$

Wenn $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$\downarrow$
immer reel

$$z^* = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)^* = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

MULTIPLIKATION UND DIVISION

$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$ Einfacher

QUIZ: $i^9 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot i = i$

A) $-i$

B) $\boxed{i}$

C) $9i$

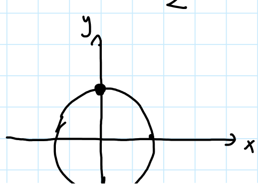
D) $9+i$

BETRAG UND PHASE VON i?

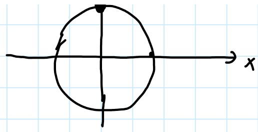
$$|i| = \sqrt{i \cdot i^*} = \sqrt{i(-i)} = \sqrt{-i^2} = \sqrt{-(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$i = 0 + 1i \leftarrow$ Normale Darstellung $x = 0,\ y = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}$$



$$i = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{x \,=\, 0} + i \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{y \,=\, 1}$$

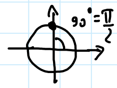


POTENZ VON i Erinnern an $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ Moivre

$\Rightarrow$ für i haben wir $i^n = \underbrace{|i|^n}_{1}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]$ (*)

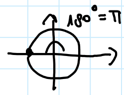
$i^0 = \cos\left(0\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(0\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 1 + i\cdot 0 = 1$

$i^1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i\,1 = i$

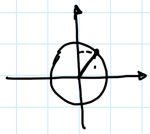


$i^2 = \cos\left(\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) + i\sin\left(\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) = \cos\pi + i\sin\pi$

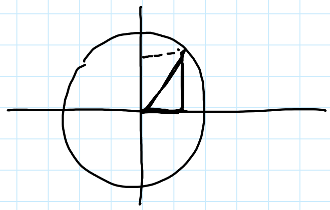
$= -1 + i\cdot 0 = -1$



QUIZ $\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}} \overset{\text{Formel}(*)}{=} \cos\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$



A) -1 B) i C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ D) $-1+i$



$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$