Dienstag, 9. April 2024 10:58

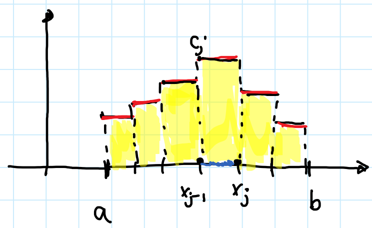
INTEGRALRECHNUNG

TREPPEFUNKTIONEN

Definition: Man nennt $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ TREPPENFUNKTION, falls es eine Unterteilung

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$

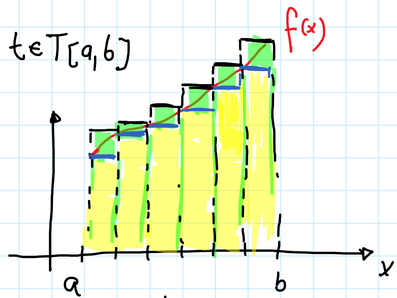
gibt, so dass t auf jedem offenen Intervall $]x_{j-1}, x_j[$ konstant ist, mit c_j bezeichnet



Definition: Das Integral einer Treppenfunktion wird definiert als $\int_a^b t(x)\,dx = \sum_{j=0}^{m} c_j\,(x_j - x_{j-1})$

Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ bilden ein Vektorraum $\to T[a,b]$

Definition Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion, und $t \in T[a,b]$

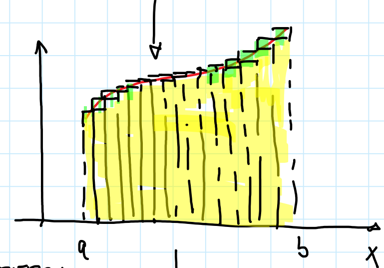


OBER-INTEGRAL $\int_a^{b*} f(x)\,dx = \inf \left\{ \int_a^b t(x)\,dx \;;\; t \in T[a,b],\; t \geq f \right\}$

Inf = infimum = Unterste der Menge

UNTER-INTEGRAL $\int_{a*}^{b} f(x)\,dx = \sup \left\{ \int_a^b t(x)\,dx \;;\; t \in T[a,b],\; t \leq f \right\}$

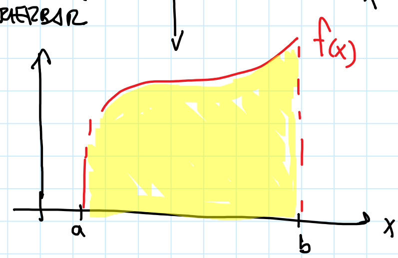
sup = supremum = Oberste der Menge



DAS RIEMANN-INTEGRAL

Definition: Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist RIEMANN-INTEGRIERBAR

falls $\int_a^{b*} f(x)\,dx = \int_{a*}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

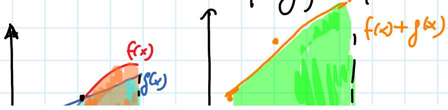


GEOMETRISCHE INTERPRETATION = Fläche unter der Kurve

SÄTZE

- Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar
- Jede monotone " " " "
- Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f+g$, $\lambda \cdot f$ auch integrierbar und es gilt

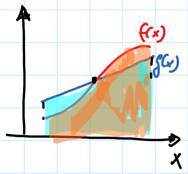
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

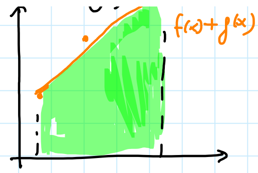


integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\cdot dx$$





- Seien $f,g : [a,b] \to$ integrierbare Funktionen. Dann ist auch $f \cdot g$ eine integrierbare Funktion, aber

$$\int_a (\cdot\, g)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

STAMMFUNZION

<u>Definition</u>: Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt STAMMFUNKTION einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls $F'(x) = f(x)$

Eine weitere Funktion $G : I \to \mathbb{R}$ ist auch eine Stammfunktion zu f falls $F - G$ eine Konstante ist.

UNBESTIMMTES INTEGRAL $\quad F(x) = \int f(x)\,dx \quad$ FUNKTION

BESTIMMTES INTEGRAL $\quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

STAMMFUNKTIONEN VON GRUNDFUNKTIONEN

$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1 \qquad F'(x) = \frac{1}{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)}\, x^{n+1-1} = x^n = f(x)$

$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x|$

$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x \qquad F'(x) = -(-\sin x) = \sin x = f(x)$

$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$

...

QUIZ: Was ist die Stammfunktion zu $3x^2 - 4x + 5$

A) $6x - 4$
B) $3x^2 - 4x^2 + 5x$
C) $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5x$
D) $x^3 - 2x^2 + 5x + 42$

$$F(x) = \int (3x^2 - 4x + 5)\,dx = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x^2}{\cancel{2}} + 5x + C = x^3 - 2x^2 + 5x + C$$

QUIZ: Was ist die Stammfunktion $5x^2 + \sin x - \frac{1}{x}$

A) $5x^3 - \sin x - \frac{1}{x^2}$
B) $\frac{5}{3}x^3 + \cos x - \ln|x| + C$
C) $\frac{5}{3}x^3 - \cos x - \ln|x| + C$
D) $\frac{5}{3}x^3 - \sin x + \ln|x|$

$$F(x) = \int \left(5x^2 + \sin x - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{5x^3}{3} - \cos x - \ln|x| + C$$

SUBSTITUTIONSREGEL

Theorem: Sei $f : [a,b] \to W_1$ stetig differenzierbare Funktion und $g : D_2 \to W_2$ eine stetige Funktion $W_1 \subset D_2$.

Dann gilt

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx$$

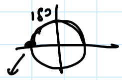
Dann gilt $\int_a g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \int_{f(a)} g(x)\,dx$

BEISPIEL $I = \int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin\vartheta \left(5\cos^2\vartheta + 3\cos\vartheta + 1\right)$: Substitution $u = -\cos\vartheta$

$\frac{du}{d\vartheta} = \sin\vartheta \Rightarrow du = \sin\vartheta \, d\vartheta$

$$= \int_{-1}^{1} du \left(5u^2 - 3u + 1\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{5u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + u}_{F(u)} \Big|_{-1}^{1} = \underbrace{\frac{5}{3} - \cancel{\frac{3}{2}} + 1}_{F(u=1)} \underbrace{+ \frac{5}{3} + \cancel{\frac{3}{2}} + 1}_{-\,F(u=-1)} = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}$$



$\cos(\pi) = -1$

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \int g(x)\,dx$$

BEISPIEL $\int \_\_\_$

$$\int \underset{g}{\sin\sqrt{x}} \cdot 2 \underset{f'}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\,dx = 2\int \sin\sqrt{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx}_{du}$$

substit. $u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

subst.

$$= 2\int \sin u \, du$$

$$= 2\left(-\cos u + c\right)$$

$$= -2\cos u + K$$

$$= -2\cos\sqrt{x} + K$$

PARTIELLE INTEGRATION

Theorem Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

BEISPIEL

$$\int_0^1 dx \, \underset{f(x)}{x} \, \underset{g'(x)}{e^x} = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1$$

$$= \cancel{e} - 0 - \cancel{e} + 1 = 1$$

$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

INTEGRALE ÜBER RATIONALE FUNKTIONEN

$$I = \int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)}\,dx = \int_0^1 \left[(x+5) + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{4}{(x-2)} - \frac{2}{(x+2)}\right] dx =$$

$$= \int_0^1 (x+5)\,dx + \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + 4\int_0^1 \frac{1}{(x-2)}\,dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(x+2)}\,dx$$

$$\int_0^1 (x+5)\,dx = \frac{x^2}{2} + 5x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 5 - 0 = \frac{11}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} = \int_0^1 dx\,(x-2)^{-2} = \frac{1}{-2+1}(x-2)^{-2+1}\Big|_0^1 = -\frac{1}{x-2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{1-2} + \frac{1}{0-2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2|\Big|_0^1 = \ln|1-2| - \ln|-2| = \underset{=0}{\ln 1} - \ln 2 = -\ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2| \Big|_0^1 = \ln|1-2| - \ln|-2| = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2 = -\ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln|1+2| - \ln|2| = \ln 3 - \ln 2$$

$$\Rightarrow I = \frac{11}{2} + \frac{1}{2} + 4(-\ln 2) - 2(\ln 3 - \ln 2) = 6 - 2\ln 2 - 2\ln 3$$

UNEIGENTLICHE INTEGRALEN

<u>Definition</u>: Integral bei dem eine Integration unendlich ist oder bei dem der Integrand an einer Integrationsgrenze nicht definiert ist. Man kann auch eine Kombination haben

1) Eine Integrationsgrenze unendlich

$f: [a, \infty[\to \mathbb{R}$ im Intervall $[a, \Lambda]$ $a < \Lambda < \infty$ Riemann-integrierbar

Fall der Grenzwert $\lim_{\Lambda \to \infty} \int_a^\Lambda f(x)\,dx$ existiert

man setzt

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\Lambda \to \infty} \int_a^\Lambda f(x)\,dx$$

Analog definiert man das Integral für das Intervall $]-\infty, b]$

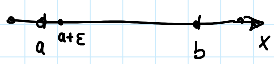
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\Lambda \to -\infty} \int_\Lambda^b f(x)\,dx$$

BEISPIEL $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\Lambda \to \infty} \int_1^\Lambda \frac{dx}{x^2} = \lim_{\Lambda \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \Big|_1^\Lambda \right] = \lim_{\Lambda \to \infty} \left(-\frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{1} \right) = \lim_{\Lambda \to \infty} \left(-\frac{1}{\Lambda} \right) + 1 = 0 + 1 = 1$$

2) Integral in einer Intervallgrenze nicht definiert

$f:]a, b] \to \mathbb{R}$, über jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$ mit $0 < \varepsilon < (b-a)$ Riemann integrierbar

Dann, falls der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ existiert,



nennt man das Integral über $[a, b]$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

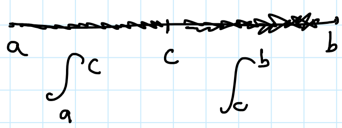
BEISPIEL $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^1 = 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sqrt{x} \Big|_\varepsilon^1 = 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} (1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2$$

3) $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Funktion, die über jedem Intervall $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ Riemann-integr.

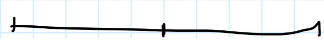
$c \in]a, b[$ beliebig. Falls $\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^c f(x)\,dx$; $\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_c^\beta f(x)\,dx$

dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

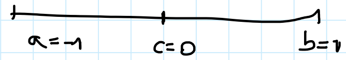


BEISPIELE $$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = 2 + 2 = 4$$



BEISPIELE

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = 2+2=4$$



$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{-x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} -2\sqrt{-x}\,\Big|_{-1}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \left[-2\sqrt{-\varepsilon} + 2\sqrt{1}\right] = 2$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$$