FUNKTIONEN

Definition: Seien D und W Teilmenge von $\mathbb{R}$. Unter einer reellwertigen Funktion auf D versteht man eine Abbildung

$$f: D \to W$$
$$x \to y = f(x)$$

D Definitionsbereich

W Wertebereich

Eine Funktion f ordnet jedem $x \in D$ ein $y \in W$ zu.

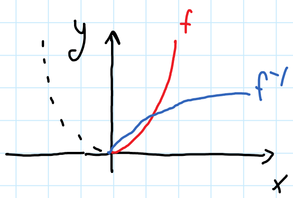
UMKEHRFUNKTIONEN

Definition: Gibt es zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ mit $y = f(x)$, so ist die Funktion f umkehrbar. In diesem Fall bezeichnet man die Umkehrfunktion mit f^{-1}

$$f^{-1}: W \to D$$
$$y \to x = f^{-1}(y).$$

BEISPIEL: $D = \mathbb{R}_0^+$ $W = \mathbb{R}_0^+$

$$f: D \to W$$
$$x \to y = x^2$$



Umkehrfunktion

$$f^{-1}: W \to D$$
$$y \to \sqrt{y}$$

GRENZWERTE VON FUNKTIONEN

Definition: Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = a$ den Grenzwert A wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Wenn sich die Funktion $f(x)$ bei unbegrenzter Annährung von x an a unbegrenzt an A nähert.

$$x \to a \quad \Rightarrow f(x) \to A$$

A kann auch $\pm \infty$

Die Funktion $f(x)$ muss an der Stelle $x=a$ den Wert A nicht unbedingt annehmen und braucht nicht definiert sein.

Grenzwerte können auch einseitig sein

$\lim_{x \to a^-} f(x) = A$ (wir nehmen $x < a$) oder $\lim_{x \to a^+} f(x) = B$ (wir nehmen $x > a$)

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = A$$

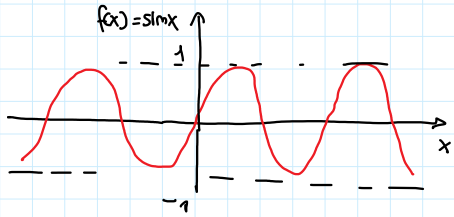
STETIGKEIT

<u>Definition</u>: Sei nun $a \in D$. Man bezeichnet eine Funktion als stätig im Punkt a falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{gilt.}$$

Die einseitigen Werten sind in diesem Fall gleich.

Stetig im $\mathbb{R}$ $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$



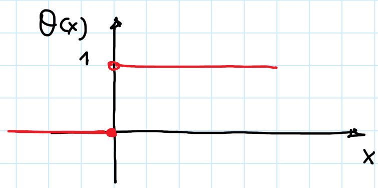
DIE HEAVISIDE FUNKTION

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Theta(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \Theta(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \Theta(x) = 0$$



Die Heaviside-Funktion ist im 0 <u>nicht stätig</u>.

THEOREM

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die im x_0 stetig sind. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$

Dann sind die Funktionen

$$f + g : D \to \mathbb{R}$$
$$\lambda \cdot f : D \to \mathbb{R}$$
$$f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$

im Punkte x_0 stetig.

Ist ferner $g(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$$

$\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$; muss auch in der Nähe gucken

im x_0 stetig $D' = \{ x \in D : g(x) \neq 0 \}$.

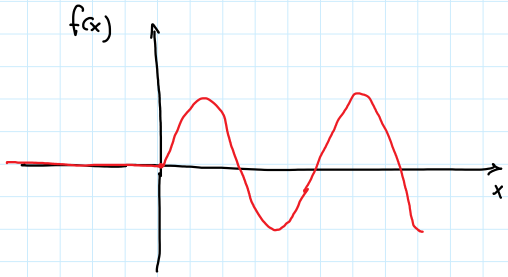
QUIZ

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin x & x > 0 \end{cases}$

Ist $f(x)$ im $x_0 = 0$

A) Stetig

B) Nicht stetig



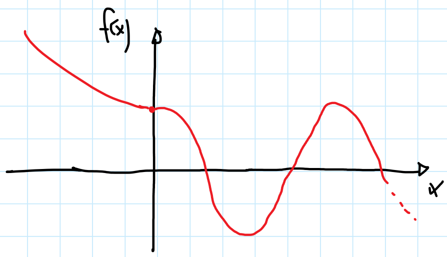
QUIZ

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x < 0 \\ \cos(x) & x \geq 0 \end{cases}$

Ist $f(x)$ im $x_0 = 0$

A) Stetig

B) nicht stetig



$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ im 0 $\quad \frac{1}{e^0} = 1$

QUIZ

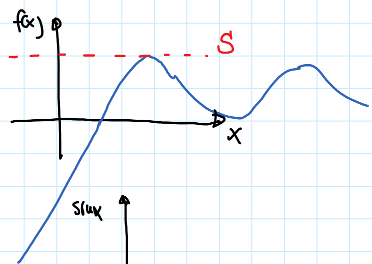
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-x} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + e^{x} & x > 0 \end{cases}$$

Ist $f(x)$ im $x_0 = 0$

A) stetig

B) nicht stetig

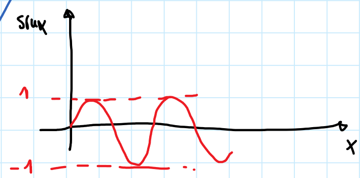
EIGENSCHAFTEN DER REELLEN FUNKTIONEN



NACH OBEN BESCHRÄNKT, wenn $\exists S \in \mathbb{R}$: (so dass) $\forall x \in D$ $\quad f(x) \leq S$

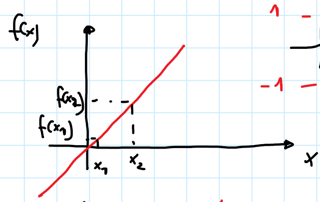
NACH UNTEN BESCHRÄNKT, wenn $\exists S \in \mathbb{R}$: $\forall x \in D$ $\quad f(x) \geq S$

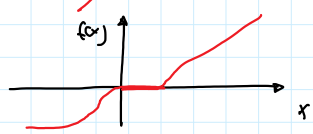
BESCHRÄNKT, wenn $\exists S \in \mathbb{R}$: $\forall x \in D$ $\quad |f(x)| \leq S$



MONOTON WACHSEND, $x_1 > x_2$ $\quad f(x_1) \geq f(x_2)$

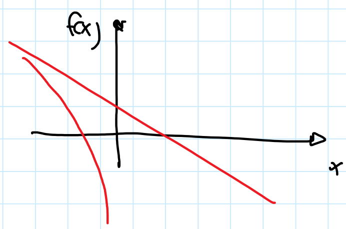
STRENG MONOTON WACHSENDE, $x_1 > x_2$ $\quad f(x_1) > f(x_2)$



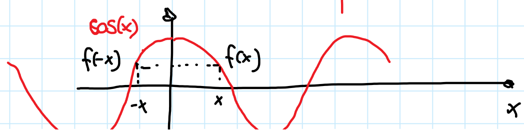


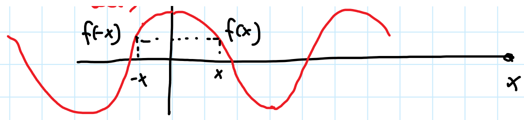
MONOTON FALLEND wenn $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

STRENG " " $\quad f(x_1) < f(x_2)$

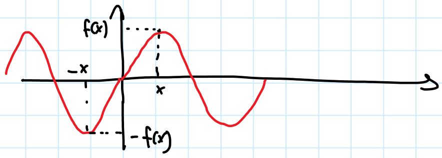


GERADE FUNKTION $\quad f(-x) = f(x)$





UNGERADE FUNKTION $f(-x) = -f(x)$



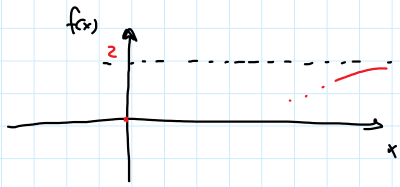
RATIONALE FUNKTIONEN

Definition: Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen. Unter einer rationalen Funktion versteht man eine Funktion

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R},\ q(x) \neq 0\}.$$

$$f(x) = \frac{2x^2+x+3}{x^2}$$



Diese Funktion kann Polstellen und Asymptote haben

Polstelle: x-Wert für den die Funktion gegen $\pm\infty$ geht

Asymptote: eine Gerade der sich die Funktion für grosse $|x|$-Werte beliebig nahe annähert.

PARTIALBRUCHZERLEGUNG

$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$ Grad n

$q(x) = q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \dots + q_1 x + q_0$ " m

Faktorisierung $q(x) = c \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{\lambda_j}$

x_j ist eine Nullstelle von $q(x)$ ($\Leftrightarrow$ Polstellen von $R(x)$)

λ_j Multiplizität der Nullstelle

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = P(x) + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k}$$

$P(x)$: Polynom vom Grad $n-m$; $\sum_{j=1}^{r}$: Nullstellen; $\sum_{k=1}^{\lambda_j}$: Multipl.

a_{jk} Koeffizienten

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^4+3x^3-12x^2-3x+18}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{x^4+3x^3-12x^2-3x+18}{x^3-2x^2-4x+8}$$

$(x-2)(x-2)$ → $x=2$ Nullstelle mit Multiplizität 2
→ $x=-2$ " " " 1

Finden $P(x)$

$$(x^4+3x^3-12x^2-3x+18) : (x^3-2x^2-4x+8) = (x+5) + \frac{2x^2+9x-22}{x^3-2x^2-4x+8}$$
$$-(x^4-2x^3-4x^2+8x)$$

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18) : (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) = \underbrace{(x+5)}_{P(x)} + \dfrac{2x^2 + 9x - 22}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \\
-(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x) \\
\hline
\qquad 5x^3 - 8x^2 - 11x + 18 \\
\quad -(5x^3 - 10x^2 - 20x + 40) \\
\hline
\qquad\qquad 2x^2 + 9x - 22
\end{array}
$$

Rest

"Rest"

$$\frac{2x^2 + 9x - 22}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{a_{12}}{(x-2)^2} + \frac{a_{11}}{(x-2)} + \frac{a_{21}}{(x+2)}$$

Koeffizienten a_{12}, a_{11}, a_{21} finden

$$= \frac{a_{12} \cdot (x+2) + a_{11}(x-2)(x+2) + a_{21}(x-2)^2}{(x-2)^2 (x+2)}$$

$$= \frac{(a_{11} + a_{21})x^2 + (a_{12} - 4a_{21})x + (2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21})}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{21} = 2 \\ a_{12} - 4a_{21} = 9 \\ 2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21} = -22 \end{cases}$$

LGS eindeutige Lösung

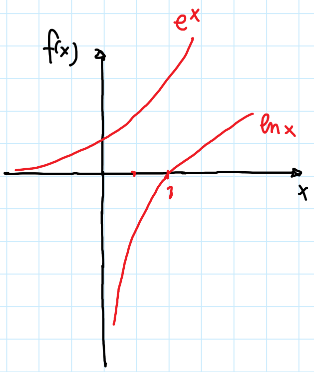
$a_{12} = 1$
$a_{11} = 4$
$a_{21} = -2$

Partialbruchzerlegung $\dfrac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2 (x+2)} = (x+5) + \dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{4}{(x-2)} - \dfrac{2}{(x+2)}$.

FUNKTIONEN

$f(x) = e^x$

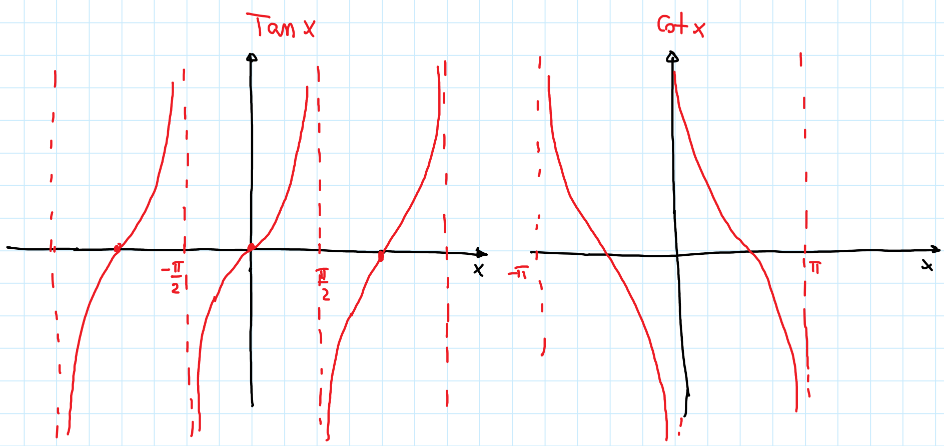
stetig, überall positiv, streng monoton wachsend, geht für große x-Werte gegen Unendlich schneller als jedes Polynom.



$f(x) = \ln x$

Nur für $x > 0$ definiert

Vertikale Asymptote
stetig und monoton wachsend



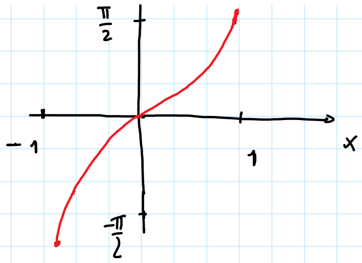
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Periodisch bei $\frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$\arcsin x = \sin^{-1}(x)$ ARKUSSINUS

$\arcsin x = \sin^{-1}(x)$ ARKUSSINUS



$\arccos x = \cos^{-1}(x)$ ARKUSKOSINUS

$\arctan x = \tan^{-1}(x)$ ARKUSTANGENS

$\operatorname{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$ ARKUSKOTANGENS

HYPERBOLISCHE FUNKTIONEN

$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$x^2 - y^2 = 1$ Hyperbel