FOLGEN UND REIHEN

FOLGEN

Definition: Unter einer Folge a_n reeller Zahlen versteht man eine Funktion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, in der jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n^2}$

Explizit $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $a_4 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$, ...

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots \frac{1}{100^2} \ldots \frac{1}{1000^2}, \ldots \to 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

KONVERGENTE FOLGEN

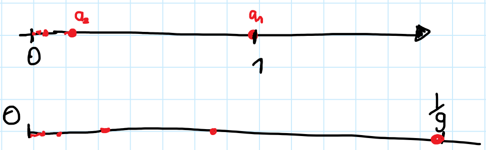
Definition: Eine Folge a_n heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\Updownarrow$

Im diesem Fall schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

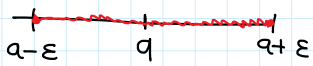
a Grenzwert, Limes

Im anderen Wörtern liegen für eine konvergente Folge ab einem bestimmten N alle Folgenglieder im Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$



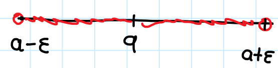
$|a_n - a| \leq \varepsilon$

$[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$



$|a_n - a| < \varepsilon$

$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$



DIVERGENTE FOLGEN

Definition: Eine Folge nennt man divergent, wenn sie keinen Grenzwert hat.

z.B divergiert gegen $\pm\infty$

Beispiele: $a_n = n$

$a_n = 1 - n^2 = -\infty$

BESCHRÄNKTE FOLGEN

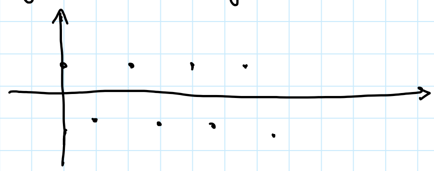
Definition: Eine Folge heißt nach oben beschränkt, falls ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so das $a_n \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Eine Folge heißt nach unten beschränkt, falls ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so das $a_n \geq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Die Folge heißt BESCHRÄNKT, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Aber eine beschränkte Folge ist nicht notwendiger Weise konvergent.

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$



Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien a_n und b_n zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Dann sind auch die Folgen $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, λa_n, λb_n, $a_n \cdot b_n$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ konvergent

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Ist weiter $b \neq 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ $\forall n \geq N$

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N} \longrightarrow \text{doch eine Zahl}$$

dann $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

<u>Theorem</u>: Seien a_n und b_n zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ $\forall n$

Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$a \leq b$$

<u>Bemerkung</u>: Aus $a_n < b_n$ folgt nicht $a = \lim_{n\to\infty} a_n < b = \lim_{n\to\infty} b_n$

Beispiel: $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$ $\quad a_n < b_n \iff 0 < \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ aber $0 < 0$ falsch!

<u>Quiz</u> $\quad a_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

n		$\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$
1	$\longrightarrow$	$\cos(1) = 0.54$
2		

Quiz

$a_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

n		$\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$
1	$\longrightarrow$	$\cos(1) = 0.54$
2	$\longrightarrow$	$\cos\left(\frac{1}{4}\right) = 0.969$
3	$\longrightarrow$	$\cos\left(\frac{1}{9}\right) = 0.993$
4	$\longrightarrow$	$\cos\left(\frac{1}{16}\right) = 0.998$

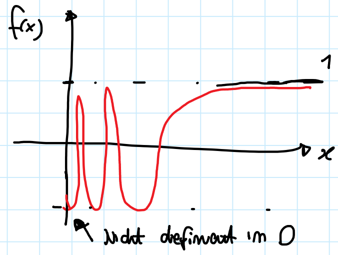
A) divergente

B) Konvergent mit Grenzwert 0

C) " " " $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

D) " " " 1

$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$



REIHEN

a_n Folge

S_N : PARZIALSUMME $\qquad S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$

Als UNENDLICHE REIHE bezeichnet man nun die Folge dieser Parzialsumme

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Eine unendliche Reihe heißt <u>konvergent</u>, wenn die Folge der Parzialsumme konvergiert.
Ansonsten heißt sie <u>divergent</u>.

GEOMETRISCHE REIHE

Die geometrische Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ Konvergiert $|x|<1$, sonst divergiert

<u>Partialsumme</u> $\qquad S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$

<u>Beweis</u>

$$S_N = 1 + \underbrace{x + x^2 + \ldots + x^{N-1}}_{S_{N-1}} + x^N$$

$$S_N - 1 = x + x^2 + \ldots + x^N$$

$$\frac{S_N - 1}{x} = 1 + x + \ldots + x^{N-1} = S_{N-1} = S_N - x^N$$

$$\frac{S_N - 1}{x} = (S_N - x^N)$$

$$S_N - 1 = S_N \cdot x - x^{N+1}$$

$$S_N - S_N \cdot x = 1 - x^{N+1}$$

$$S_N(1-x) = 1 - x^{N+1} \implies S_N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \qquad \text{q.e.d.}$$

HARMONISCHE REIHE $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent $\qquad$ Folge $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ konvergent

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

divergent

$$= 1 + 1 + 1 + \dots + \dots$$

Andere wichtige Reihen

$$\star \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \overbrace{(-1)^0 \frac{x^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!}}^{n=0} + \overbrace{(-1)^1 \frac{x^{2\cdot 1+1}}{(2\cdot 1+1)!}}^{n=1} + \dots = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \overbrace{(-1)^0 \frac{x^{2\cdot 0}}{(2\cdot 0)!}}^{n=0} + \overbrace{(-1)^1 \frac{x^{2\cdot 1}}{(2\cdot 1)!}}^{n=1} + \overbrace{(-1)^2 \frac{x^{2\cdot 2}}{(2\cdot 2)!}}^{n=2} + \dots = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Die Formel von Euler $\left(e^{ix} = \cos x + i \sin x\right)$

Nehmen $\star$ und $x \to ix$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\text{gerade}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{ungerade}}$$

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$$

$$i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (-1)^n \cdot i$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \quad \text{q.e.d.}$$

$$\boxed{e^{-ix} = \cos x - i \sin x}$$

$$\begin{aligned} & e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ + \quad & e^{-ix} = \cos x - i \sin x \\ \hline & e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cdot \cos x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\begin{aligned} & e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ - \quad & e^{-ix} = \cos x - i \sin x \\ \hline & e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Additionstheoremen

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\star \quad e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

Wo $\quad e^{i\overbrace{(\alpha+\beta)}^{\gamma}} = \cos(\overbrace{\alpha+\beta}^{\gamma}) + i \sin(\overbrace{\alpha+\beta}^{\gamma})$ Euler Formel

Wo $e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ Euler Formel

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$

* wird $\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta)$

$= \cos\alpha\cdot\cos\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\cdot\sin\beta + \underbrace{i^2}_{=-1}\sin\alpha\sin\beta$

$= \cos\alpha\cdot\cos\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$= \underbrace{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta)}_{\text{Reel Anteil}} + i\underbrace{(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}_{\text{Imaginär Anteil}}$

$z_1 = z_2 \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$Re\{z_1\} + i\,Im\{z_1\} = Re\{z_2\} + i\,Im\{z_2\}$

$\Rightarrow Re\{z_1\} = Re\{z_2\}$
$Im\{z_1\} = Im\{z_2\}$

$\Longrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

q.e.d.