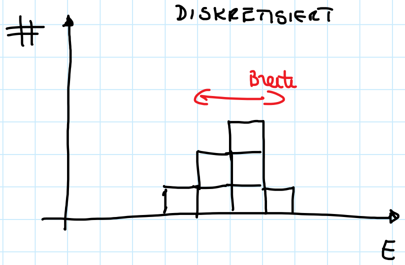
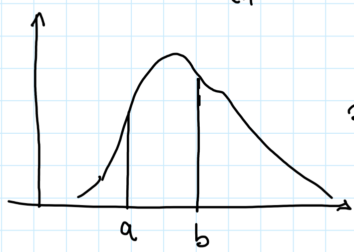
FEHLERRECHNUNG

Motivation:

- Jede physikalische Messung ist mit Fehlern behaftet
- 2 Arten von Fehlern:
  - SYSTEMATISCHE FEHLER
  - STATISTISCHE FEHLER ⇐
- Wenn eine Messung wiederholt wird, variieren die statistische Fehler, nicht die systematische Fehler.

Wahrscheinlichkeitsverteilung





$$P(x \in [a,b]) = \int_a^b p(y)\,dy$$

p : Wahrscheinlichkeitverteilung (Dichte)

$p: \mathbb{R} \to [0,\infty[$

$p(y) \geq 0$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} p(y)\,dy = 1$

Gesetz der großen Zahlen

Bei N-facher Messung einer zufällig verteilte Größe gilt für die relative Häufigkeit, mit der das Ergebnis E erzielt wird

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#(E)}{N} = P(E)$$

Wahrscheinlichkeit von E
"Probability"

MITTELWERT

N Widerholung einer Messung, mittlere Messwert (MITTELWERT)

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} x_m$$

$\lim N \to \infty$

MITTELWERT

$$\mu = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,dx$$

VARIANZ

Ein Maß für die mittlere Streuung der Ergebnis ist die VARIANZ

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{m=1}^{N}(x_m - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = \Delta x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x\rangle)^2 p(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 + \langle x\rangle^2 - 2x\langle x\rangle\right) p(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, p(x)\,dx + \langle x\rangle^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx - 2\langle x\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx + \langle x\rangle^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx}_{1} - 2\langle x\rangle \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,dx}_{\langle x\rangle}$$

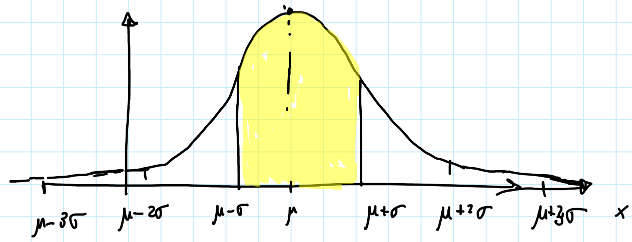
$$= \langle x^2\rangle + \langle x\rangle^2 - 2\langle x\rangle^2$$

$$= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

NORMALVERTEILUNG

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Gauss - Funktion



$$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = 68.27\,\%$$

$$P(\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma) = 95.45\,\%$$

$$P(\mu-3\sigma \le x \le \mu+3\sigma) = 99.73\,\%$$

$$\boxed{D = \mu \pm \sigma}$$

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

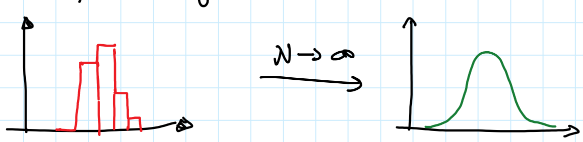
Theorem Seien $x_1 \dots x_N$ unabhängig voneinander identisch verteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2.

Dann ist im $\lim_{N\to\infty}$ ist der Mittelwert von Stichprobe Normal verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{N}$

$\Downarrow$

Gaussfunktion

N Stichprobe Messungen



FEHLER FORTPFLANZUNG

$f(x,y)$ die eine Größe beschreibt

Ich kann x, y messen $\qquad x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$

Fehler für f $\qquad f \pm \Delta f$?

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \underset{\text{Taylor Entwicklung}}{=} f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \dots$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \dots$$

n - Messungen von den Größen x, y: Einzelne Werte x_j, y_j $\Rightarrow n$ Ergebnisse für f $\quad f_j$

$$f_j - \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_j - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_j - \bar{y}) + \dots$$

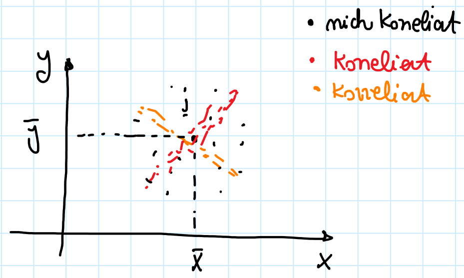
werden vernachlässigt

$$f_j - \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_j - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_j - \bar{y}) + \dots$$ werden vernachlässigt

$$\sigma_f^2 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(f_j - \bar{f})^2$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_j-\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_j-\bar{y})\right]^2$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left[(x_j-\bar{x})^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + (y_j-\bar{y})^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2(x_j-\bar{x})(y_j-\bar{y})\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]$$



KOVARIANZ $Cov(x,y) = \sigma_{xy} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(x_j-\bar{x})(y_j-\bar{y})$

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sigma_{xy}$$

UNKORRELIERTE ZUFALLGRÖSSEN

$$\boxed{\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2}}$$

$$f = \bar{f} \pm \sigma_f$$

BEISPIELE

$f = x+y$ $\qquad \sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ quadratische Summe

$\frac{\partial f}{\partial x}(x+y) = 1$

$\frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1$

KONKRETES BEISPIEL $\quad x = 15 \pm 3$, $\quad y = 17 \pm 4$

$\bar{f} = 15+17 = 32$

$\sigma_f = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\Rightarrow f = 32 \pm 5$

$f(x,y) = x - y \qquad \sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

$f(x,y) = x\cdot y \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \qquad \Rightarrow \sigma_f = \sqrt{y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2}$

relative Fehler $\quad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\frac{y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2}{x^2y^2}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$ quadratische Summe

KONKRETES BEISPIEL $\quad x = 2 \pm 0.06$, $\quad y = 5 \pm 0.2$ $\qquad f = x\cdot y$? $\qquad \bar{f} = 10$

$$\sigma_f = f\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = 10\sqrt{\left(\frac{0.06}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.2}{5}\right)^2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\bar{f} \pm \sigma_f = 10 \pm 0.5$$

QUIZ: $\quad x = 17 \pm 4$, $\quad y = 15 \pm 3$

$f = x - y$

$\bar{f} \pm \sigma_f$?

A) 2 ± 1

B) $2 \pm \sqrt{7}$

C) 2 ± 4

D) 2 ± 5

BEISPIELE $f = \frac{x}{y}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{y^2}\sigma_x^2 + \frac{x^2}{y^4}\sigma_y^2}$$

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^4}\sigma_y^2\right)\frac{y^2}{x^2}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

BEISPIEL POTENZ $f = x^a y^b$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a x^{a-1} \cdot y^b$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = b x^a y^{b-1}$$

$$\Rightarrow \sigma_f = \sqrt{a^2 x^{2a-2} y^{2b} \cdot \sigma_x^2 + b^2 x^{2a} y^{2b-2} \cdot \sigma_y^2}$$

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\frac{a^2 x^{\cancel{2a}-2} y^{\cancel{2b}} \sigma_x^2 + b^2 x^{\cancel{2a}} y^{\cancel{2b}-2} \sigma_y^2}{x^{\cancel{2a}} y^{\cancel{2b}}}}$$

$$= \sqrt{a^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + b^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$