Montag, 8. April 2024 08:56

DIFFERENTIALRECHNUNGEN

DIE ABLEITUNG

Definition. $D \subset \mathbb{R}$ $\quad f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

f nennt man im Punkte $x_0 \in D$ DIFFERENZIERBAR,

falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

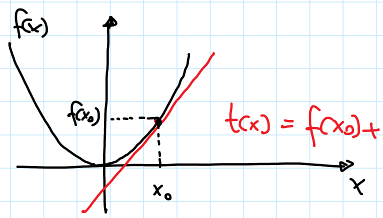
existiert.

$f'(x)$ auch eine Funktion

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\cancel{x}+h-\cancel{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

GEOMETRISCHE BEDEUTUNG

$$\boxed{f'(x_0) \text{ Steigung der Tangente im Punkte } x_0}$$



$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$y = ax + b = t(x) \qquad a = f'(x_0)$$

a: Steigung

$t(x) = f'(x_0) \cdot x + b$ $\quad \to$ Gerade muss durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ gehen

$t(x_0) = f'(x_0)\, x_0 + b = f(x_0) \quad \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ $\quad$ dadurch wird b bestimmt

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{q.e.d.}$$

BEMERKUNG Eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion $f(x)$ ist dort auch stetig.

BEWEIS Annahme ist $f'(x_0)$ $\qquad$ stetig im x_0 $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

$$= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$= f'(x_0)\cdot 0 = 0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \implies f \text{ ist stetig in } x_0$$

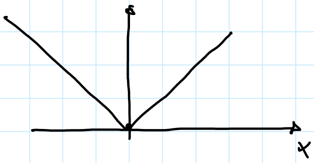
q.e.d.

Aber f stetig im x_0 heißt nicht unbedingt differenzierbar im x_0.

QUIZ: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ ist im Punkt $x=0$

A) differenzierbar

B) Nicht differenzierbar



stetig im 0, aber nicht differenzierbar

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = 1$$

$$\neq$$

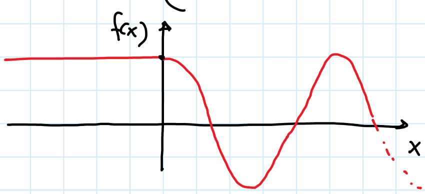
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = -1$$

QUIZ: $f(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$

Ist f im Punkt 0

A) differenzierbar

B) nicht differenzierbar



$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-1}{x-0} = 0$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \dots - \cancel{1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2}+\dots}{x} = 0$$

WICHTIGE ABLEITUNGEN

$f(x) = x^n \implies f'(x) = n\,x^{n-1}$

$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$

$f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x$

THEOREM

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ im $x \in D$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$

Dann $f+g$ differenzierbar ist
$\lambda \cdot f$ " "

Es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

$f(x) = \sin x + \cos x$

$f'(x) = \cos x + (-1)\sin x = \cos x - \sin x$

PRODUKTREGEL

Wenn f, g in x differenzierbar ist

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

BEWEISEN

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) \overbrace{- f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\cdot g(x)}^{0} - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h} + \frac{\left[f(x+h) - f(x)\right] g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] g(x)$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)\cdot g(x)$$

$$= f(x)\, g'(x) + f'(x)\cdot g(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

BEISPIEL:

$$F(x) = \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)}$$

$$F'(x) = \underbrace{2x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} + \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)}$$

QUOTIENTENREGELN

$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D \qquad f/g$ differenzierbar

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

BEISPIEL:

$$F(x) = \frac{\overset{f}{2x-3}}{\underset{g}{x+1}} \qquad F'(x) = \frac{2\cdot(x+1) - (2x-3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{2x} + 2 - \cancel{2x} + 3}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

KETTENREGEL

Seien $f: D_1 \longrightarrow W_1$

$g: D_2 \longrightarrow W_2$

Funktionen mit $W_1 \subset D_2$. Falls f im Punkte $x \in D_1$ differenzierbar ist und g im Punkte $y = f(x) \in D_2$ differenzierbar ist, so ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : D_1 \to W_2$ im x differenzierbar es gilt

$g(f(x))$ Funktion von einer Funktion

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

BEISPIEL $F(x) = \sin(3x^2+4x+5)$ $\qquad f(x) = 3x^2+4x+5$

$g(x) = \sin x$

$$F'(x) = \cos(3x^2+4x+5)(3\cdot 2x+4) \overset{!}{=} \cos(3x^2+4x+5)(6x+4)$$

$$F(x) = e^{x^2+4x} \qquad g(x) = e^x$$

$$F'(x) = e^{x^2+4x} \cdot (2x+4) \qquad f(x) = x^2+4x$$

ABLEITUNG DER UMKEHRFUNKTION

Sei $D \subset \mathbb{R}$ $\quad f: D \to W$ stetig, streng monoton Funktion

$f^{-1}: W \to D$ Umkehrfunktion

$x \in D$ wo $f(x)$ differenzierbar ist; $f'(x) \neq 0$

So ist f^{-1} im Punkt $y = f(x)$ differenzierbar

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

BEISPIEL : LOGARITHMUS $\quad f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$$f^{-1}(y) = \ln y$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right] = \frac{1}{2i}\frac{d}{dx}\left[e^{ix} - e^{-ix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{dx}e^{ix} - \frac{d}{dx}e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}i + ie^{-ix}\right)$$

$$\overset{!}{=} \frac{\cancel{i}}{2\cancel{i}}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

$$= \frac{\cancel{i}}{2\cancel{i}}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x$$

Weitere wichtige Ableitungen

$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = \sinh(x) \Rightarrow f'(x) = \cosh(x)$

$f(x) = \cosh(x) \Rightarrow f'(x) = \sinh(x)$

QUIZ

$f(x) = 3x^3 - 4$

$f'(x)$?

A) $\frac{3}{4}x^2 - 4x$

B) $9x^2 - 4$

C) $9x^2$

D) $3x^2 - 4$

QUIZ

$f(x) = \sin(\cos(2x))$

$f'(x)$?

A) $2\cos(\cos(2x))$

B) $2\sin(2x)\cdot\cos(\cos(2x))$

C) $-2\cos 2x \quad \cos(\sin(2x))$

D) $-2\sin(2x)\cdot\cos(\cos(2x))$

HÖHERE ABLEITUNGEN $\quad f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion

$f^{(1)}(x) \leftarrow f': D \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar

$f^{(2)}(x) \leftarrow f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = (f')'(x)$ zweite Ableitung

Ist $f''(x)$ auch noch differenzierbar, $f'''(x) \to f^{(3)}(x)$

n-te Ableitung $\quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$

0-te Ableitung $\quad f^{(0)}(x) = f(x)$

BEISPIELE

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

1) $f(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 5$

$f'(x) = 15x^4 + 28x^3 + 6x^2 + 2x - 1$

$f''(x) = f^{(2)}(x) = 60x^3 + 84x^2 + 12x + 2$

$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 180x^2 + 168x + 12$

$f^{(4)}(x) = 360x + 168$

$f^{(5)}(x) = 360$

$f^{(6)}(x) = 0$

$f^{(7)}(x) = 0$

...

2) $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f^{(3)}(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = +\sin x$

...

QUIZ

$f(x) = e^{2x}$

$f^{(4)}(x) = ?$

A) e^{2x}

B) $2e^{2x}$

C) $16e^{2x}$

D) $24e^{2x}$

$f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = 2 \cdot 2 e^{2x}$

$f^{(3)}(x) = 2 \cdot 2 \cdot 2\, e^{2x}$

$f^{(4)}(x) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{16}\, e^{2x}$

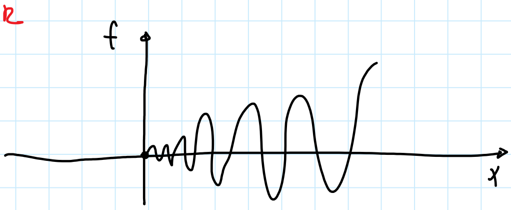
STETIGE DIFFERENZIERBARKEIT

Definition: Eine Funktion $f(x)$ nennt man stetig differenzierbar, falls sie differenzierbar ist und die Ableitung $f'(x)$ stetig ist.

Definition: Eine Funktion $f(x)$ nennt man n-mal stetig differenzierbar, falls sie n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ stetig ist.

DIFFERENZIERBAR, ABER NICHT STETIG DIFFERENZIERBAR

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



f ist <u>differenzierbar</u> im $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{2}} \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{\cancel{h}} = 0$$

Ist es stetig differenziabar? NICHT

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

x klein $\to 0$

$$x \sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \cdot \sin\left(\frac{1}{0}\right)$$