Übungsblatt 2
Komplexe Zahlen

Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Mathematischer Brückenkurs
Sommersemester 2024
Vorlesung: Prof. Dr. Sonia Bacca

Aufgabe 1: Aufwärmen mit komplexen Zahlen

Geben Sie für die folgenden komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ jeweils $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, z^* und $|z|$ an, wobei $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $z = 3 - 3i$

(b) $z = (a^5 + 7)i$

(c) $z = 40a$

(d) $z = \sqrt{5} - 5i$

(e) $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

(f) $z = 15e^{3\pi i}$

Aufgabe 2: Umformung komplexer Zahlen

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ jeweils in Normalform, Polardarstellung und Exponentialdarstellung an:

(a) $z = 2i$

(b) $z = 1 - i$

(c) $z = \dfrac{1+i}{1-i}$

(d) $z = \dfrac{-1-3i}{2+i}$

Aufgabe 3: Operationen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie Folgendes ((h) ist eine Bonusaufgabe):

(a) $z = (4 - 2i) - (6 - 5i) + (-1 + 4i)^*$

(b) $z = (4 - 3i)(7 + 3i)$

(c) $z = (1 + 2i)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

(d) $z = \left(\dfrac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^* : \left(\dfrac{3}{4}e^{-i\frac{5\pi}{2}}\right)$

(e) $z = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4$

(f) $z = \dfrac{5}{3+4i}$

(g) $z = (12 + 3\sqrt{2}i)\left(\dfrac{1}{3} - \sqrt{2}i\right)$

(h) $z = i^i$

Aufgabe 4: Grafische Darstellung komplexer Zahlen

Zeichnen Sie folgende komplexe Zahlen in die Gauß'sche Zahlenebene (formen Sie die Zahlen gegebenenfalls vorher in die Normalform um):

(a) $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(b) $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

(c) $z = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Aufgabe 5: Euler-Formel (Bonusaufgabe)

Verwenden Sie die Euler-Formel, um folgende Relationen zu beweisen:

(a) $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

(b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$

(c) $\sin^2(\alpha) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2\alpha)$