Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Mathematischer Brückenkurs
Sommersemester 2024
Vorlesung: Prof. Dr. Sonia Bacca

Übungsblatt 1
Zahlen

Aufgabe 1: Zahlenmengen

(a) Geben Sie alle natürlichen Zahlen x an, die $x < 6$ und $x \geq 3$ erfüllen. Wie viele gerade Zahlen sind darunter?

(b) Geben Sie eine rationale Zahl an, die keine ganze Zahl ist.

(c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die keine rationale Zahl ist.

Aufgabe 2: Elemente in Mengen

Schreiben Sie alle Elemente auf, die zur angegebenen Menge gehören:

(a) $M_1 = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\} =$ (d) $M_4 = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 = 1\} =$

(b) $M_2 = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 < 6\} =$ (e) $M_5 = \{x \in \mathbb{Z} | 500^x = 1\} =$

(c) $M_3 = \{x \in \mathbb{Z} | \sqrt{x} = 4\} =$ (f) $M_7 = \{x \in \mathbb{N} | x^2 \leq 6\} =$

Aufgabe 3: Bruchrechnung

Vereinfachen Sie jeden der folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

(a) $\frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{6}}$ (d) $\frac{\sqrt{36}}{\frac{144}{12}} + \frac{3^2}{3^3}$

(b) $\frac{\frac{1}{2} - (2 + \frac{1}{2}) : (-1 - \frac{1}{4})}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}}$ (e) $\frac{8}{56} \frac{(56 + 168x)^3}{(7 + 21x)^4}$

(c) $\frac{a^2 - b^2}{a + b} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{6}}}}$ (f) $\left[-2^2 : \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2\right]^2 : \left(-\frac{4}{5}\right)^4 - \left[-5 : \left(1 + \frac{2}{3}\right)\right]^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$

Aufgabe 4: Potenzen

Vereinfachen Sie die folgenden Potenzen und Logarithmen so weit wie möglich:

(a) $\frac{x^{-1} x^4 y^5}{y^3 x^2}$ (d) $(x^a y^{-a})^{\frac{1}{(n+1)}}$ (f) $\log_a b + \log_a c - \log_b b^c$

(b) $(x + y)^a z^a$ (e) $\left[\frac{1}{\left(\frac{x^3 y^{-2}}{y^{-3} x^2}\right)^2}\right]^{-1} - (xy)^2$ (g) $\log_b a \cdot \log_a b$

(c) $x^a y^a z^{-a}$

Aufgabe 5: Binomischer Lehrsatz

Binomischer Lehrsatz: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Gegeben sei folgender Ausdruck:

$$(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$$

(a) Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz, um obigen Ausdruck in Summenform zu bringen

(b) Untersuchen Sie, ob daraus für bestimmte Summenglieder eine allgemeine Aussage getroffen werden kann (Stichwort: gerade und ungerade Summanden)

Aufgabe 6: Induktionsbeweise

Beweisen Sie folgende Aussagen mittels vollständiger Induktion:
Hinweis zu (c): Additionstheorem für cos
Hinweis zu (d): kleiner Gauß

(a) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) $$(n+1)! > n(n+1) \quad \forall n \geq 4$$

(c) $$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \forall n \geq 1$$

(d) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} j \right)^2$$